

## GEOMETRIA

*Sebastià Xambó i Descamps*

Aquest capítol conté un promptuari de conceptes bàsics de geometria elemental (seccions 1 i 2) i una col·lecció de problemes (secció 3). També conté una mostra de solucions, que presentem en dues modalitats: d'una manera convencional a la secció 5 i amb forma de diàleg a la secció 4. La raó d'incloure aquesta modalitat està en el fet que ens permet introduir, d'una manera directa i breu, qüestions relatives a la resolució de problemes que poden ser útils a alguns lectors.

Al lector més interessat en la resolució de problemes de geometria clàssica, li hem de recomanar que comenci a treballar directament la llista de problemes, i que retorni a la matèria del capítol (o a algun dels textos indicats a les referències) només quan ho consideri necessari.

En canvi, al lector més motivat per completar els seus coneixements geomètrics bàsics (una necessitat que, per altra banda, pot ser més general del que el nivell de la nostra exposició podria fer pensar, sobretot atenent al tractament de la geometria que es dona a primària i secundària), li hem de recomanar que estudiï primer les seccions 1 i 2, fins al punt d'omplir tots els detalls de les demostracions que s'ometen, o de les demostracions de les quals només es donen les pinzellades principals, i de resoldre satisfactòriament els exercicis intercalats.

Per contrast amb un estudi sistemàtic de la geometria, en el qual els sistemes geomètrics més importants s'erigeixen sistemàticament a partir d'axiomes convenients, en aquesta exposició pressuposem un coneixement intuïtiu de les nocions i els enunciat més primitius de la geometria euclidiana plana, com ara els relatius a punts, rectes, angles i circumferències. Evitem així prolixes disquisicions, relatives a la construcció i anàlisi metòdica d'aquests conceptes i enunciat, que no aportarien gaire res als propòsits del capítol i que, en tot cas, s'estudien en cursos específics de geometria.

El signe [◊] al final d'una afirmació significa que es considera que la prova d'aquesta és fàcil o rutinària, però potser no totalment immediata, i per tant es recomana que el lector la comprovi efectivament abans de prosseguir la lectura.

## 1 Triangles i circumferències

El fet que moltes figures es puguin estudiar relacionant-les amb triangles, com ara quan admeten una triangulació, fa que el triangle s'hagi de considerar com una figura fonamental, i és per aquesta raó que se li dedica un espai considerable en els textos de geometria clàssica. Per altra banda, l'estudi del triangle ha estat inseparable del de la circumferència, bàsicament a causa del fet que tot triangle determina una única circumferència en la qual és inscrit (*circumferència circumscrita*). Com a objecte d'aquesta secció ens hem proposat, doncs, fer una revisió d'algunes de les propietats bàsiques del triangle i d'algunes de les relacions més remarcables entre triangles i circumferències.

### Propietats bàsiques del triangle

Si  $ABC$  és un triangle, posarem  $a, b, c$  per indicar els costats oposats a  $A, B, C$ , respectivament. Els angles corresponents als vèrtexs es denotaran  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ , o  $\alpha, \beta, \gamma$ ; són els angles oposats als costats  $a, b, c$ , respectivament. L'altura corresponent al vèrtex  $A$  es denotarà  $h_A$  o  $h_a$  (i, anàlogament,  $h_B$  o  $h_b$  per al vèrtex  $B$ , i  $h_C$  o  $h_c$  per al vèrtex  $C$ ). Amb les notacions  $AB$  i  $[AB]$  indiquem, respectivament, la recta que uneix els punts  $A$  i  $B$  i el segment (tancat) d'extremes  $A$  i  $B$ . El corresponent segment obert serà denotat  $(AB)$ . La longitud del segment  $[AB]$  serà denotada  $AB$  si pel context no hi ha perill que es pugui confondre amb la recta que uneix  $A$  i  $B$ ; en cas contrari, la denotarem  $|AB|$  o  $\overline{AB}$ .

### Igualtat de triangles

Un *desplaçament* és una transformació dels punts del pla que conserva les distàncies (vegeu el subapartat «Desplaçaments», pàg. 56). Dos triangles  $ABC$  i  $A'B'C'$  es diuen *iguals*, o *congruents*, quan hi ha un desplaçament  $\varphi$  tal que  $\varphi(A) = A'$ ,  $\varphi(B) = B'$  i  $\varphi(C) = C'$ . Per als tres criteris d'igualtat que segueixen, vegeu la figura 1.

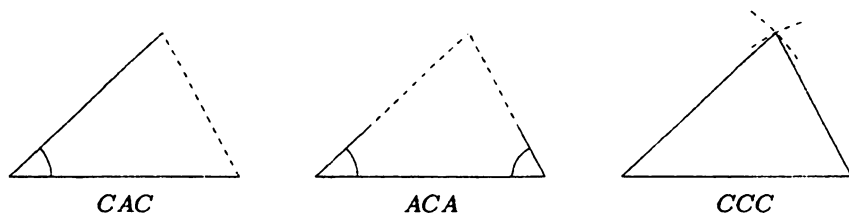


Figura 1: Criteris d'igualtat de triangles

**Criteri CAC.** Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, dos costats i l'angle que formen. En particular, dos triangles rectangles són iguals quan els corresponents catets són iguals.

## S. Xambó

**Criteri ACA.** Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat i els seus dos angles contigus. En particular, dos triangles rectangles són iguals si tenen iguals un catet i el corresponent angle agut.

**Criteri CCC.** Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, els tres costats.

### Suma dels angles d'un triangle

La suma dels tres angles de qualsevol triangle és  $\pi$  (figura 2).

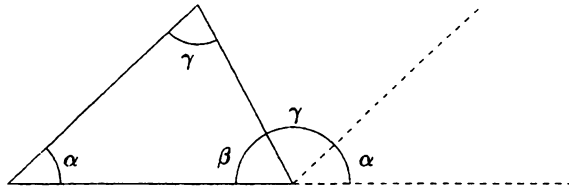


Figura 2: Suma dels angles d'un triangle

**E.1.** Proveu que l'altura sobre el major dels costats d'un triangle és interior al triangle i inferior a les altres dues altures.

**E.2.** Sigui  $P$  el punt a l'interior d'un quadrat  $ABCD$  tal que  $\widehat{PCD} = \widehat{PDC} = 15^\circ$ . Demostreu que el triangle  $ABP$  és equilàter (indicació: formeu un triangle  $BCP'$  congruent amb  $CDP$  i amb  $P'$  interior al quadrat).

### Desigualtat triangular

En un triangle cada costat és inferior a la suma dels altres dos.

**E.3.** Donat un punt  $P$  a l'interior d'un triangle  $ABC$ , demostreu que  $AP + BP < AC + BC$ .

### Àrea d'un triangle

S'obté com la meitat del producte d'un costat (base) per la corresponent altura (per exemple, àrea =  $\frac{1}{2}ah_A$ , on  $h_A$  denota l'altura corresponent al vèrtex  $A$ ). També és igual a la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen (per exemple,  $h_A = b \sin(\gamma)$ ) i, per tant, àrea =  $\frac{1}{2}ab \sin(\gamma)$ ). Observeu que si movem un vèrtex sobre la paral·lela a la base oposada, els triangles resultants tenen tots la mateixa àrea.

**E.4.** Donat un quadrilàter convex  $ABCD$ , demostreu que la seva àrea és igual a  $\frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin(\alpha)$ , on  $\alpha$  és un qualsevol dels dos angles que formen les diagonals  $AC$  i  $BD$ .

## Geometria

**E. 5** (Teorema de Ceva). Sigui  $ABC$  un triangle i  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  punts dels segments oberts  $(BC)$ ,  $(CA)$  i  $(AB)$ , respectivament. Demostreu que les rectes  $AX$ ,  $BY$  i  $CZ$  són concurrents si i només si

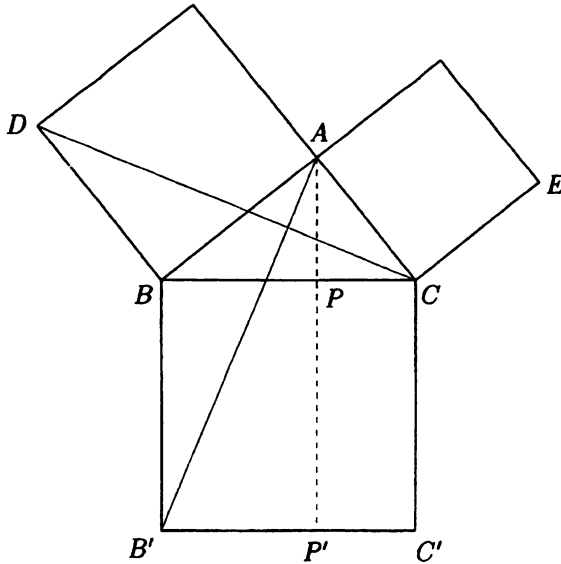
$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

(si  $AX$ ,  $BY$  i  $CZ$  són concurrents en el punt  $P$ , proveu que  $BX/XC$  és igual al quocient de les àrees dels triangles  $APB$  i  $APC$ ).

D'una recta que uneix un vèrtex  $A$  d'un triangle amb un punt del costat oposat  $[BC]$ , se'n diu una *ceviana* del triangle respecte del vèrtex  $A$ .

### Teorema de Pitàgores

En un triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és la suma dels quadrats dels catets. Per a una demostració, vegeu l'exercici que segueix.



**Figura 3:** Teorema de Pitàgores

**E. 6.** Amb les notacions de la figura 3, mostreu que si el triangle  $ABC$  és rectangle, amb  $A$  l'angle recte, i  $AP$  és l'altura corresponent al vèrtex  $A$ , llavors l'àrea del quadrat  $AD$  és igual a l'àrea del rectangle  $BPP'B'$ . Deduïu-ne el teorema del catet (vegeu l'epígraf «Teorema del catet», pàg. 60) i el teorema de Pitàgores.

## S. Xambó

### Teorema del cosinus

En un triangle de costats  $a, b, c$ , es compleix que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha),$$

on  $\alpha$  és l'angle oposat al costat  $a$  (aquest enunciat es dedueix fàcilment a partir del teorema de Pitàgores aplicat als triangles  $APC$  i  $BPC$ , on  $P$  és el peu de l'altura de  $C$ ).

**E. 7.** Si dos triangles tenen dos parells de costats respectivament iguals i els corresponents angles desiguals, llavors entre els costats oposats a aquests angles hi ha la mateixa relació de desigualtat.

### Teorema del sinus

En un triangle de costats  $a, b$  i  $c$ , i angles  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ , es compleix que

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Aquesta propietat surt directament de les definicions: si  $h$  és l'altura del vèrtex  $C$  d'un triangle  $ABC$ , llavors  $h = a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$ , d'on resulta la primera de les igualtats. Aplicant el mateix raonament als costats  $b$  i  $c$ , s'obté la segona igualtat. El valor comú dels quocients  $a/\sin(\alpha)$ ,  $b/\sin(\beta)$  i  $c/\sin(\gamma)$  serà determinat al subapartat «Radi de la circumferència circumscrita», pàg. (66).

**E. 8.** Sigui  $ABC$  un triangle i suposem que  $\beta'$  i  $\gamma'$  són angles tals que  $\alpha + \beta' + \gamma' = \pi$  i  $b/\sin(\beta') = c/\sin(\gamma')$ . Demostreu que  $\beta' = \beta$  i  $\gamma' = \gamma$ .

### Longitud de les mitjanes

Les *mitjanes* d'un triangle són les rectes que uneixen els seus vèrtexs amb els punts mitjans dels costats oposats corresponents.

Si  $M$  és el punt mitjà del costat  $AB$  i  $m = CM$ , on  $ABC$  és un triangle donat, aplicant el teorema del cosinus als triangles  $MAC$  i  $MBC$ , i sumant i restant les dues relacions que s'obtenen, s'arriba fàcilment a les dues relacions següents:

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{c^2}{4} + m^2\right), \quad a^2 - b^2 = 2cd,$$

on  $d$  és la distància de  $M$  al peu  $P$  de l'altura del vèrtex  $C$  i on hem suposat  $a \geq b$ .

La primera de les relacions anteriors ens permet trobar la mitjana  $m$  en funció dels costats  $a, b, c$ :

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

**E. 9.** Si en un triangle dues mitjanes són iguals, llavors el triangle és isòsceles.

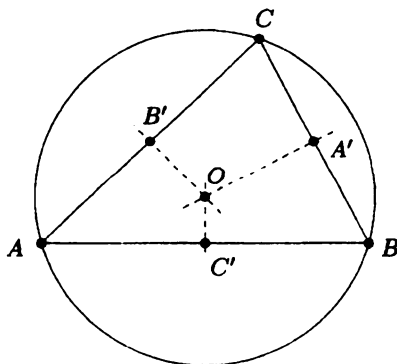
## Geometria

**E.10.** Siguin  $A$  i  $B$  dos punts,  $M$  el seu punt mitjà,  $c = AB$  i  $k \geq c^2/2$  un nombre real. Proveu que la circumferència de centre  $M$  i radi  $\sqrt{k/2 - c^2/4}$  coincideix amb el lloc geomètric dels punts tals que la suma dels quadrats de les seves distàncies a  $A$  i a  $B$  és igual a  $k$ .

**E.11.** Amb les mateixes notacions i hipòtesis que en l'exercici anterior, proveu que el lloc geomètric dels punts tals que la diferència dels quadrats de les seves distàncies a  $B$  i a  $A$  és igual a  $k$ , coincideix amb la recta perpendicular a  $AB$  pel punt del segment  $[AM]$  que és a la distància  $k/(2c)$  de  $M$ .

### Alguns punts associats a un triangle

En cada triangle es poden considerar diversos punts que tenen, cada un d'ells, una relació geomètrica remarcable amb el triangle. En aquest apartat considerarem el circumcentre, l'ortocentre, l'incentre i els excentres. Més endavant n'estudiarem d'altres.



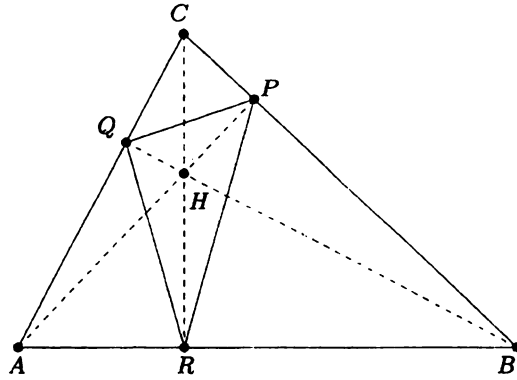
**Figura 4:** *Circumcentre*

#### *Circumcentre*

Les mediatrises dels costats d'un triangle  $ABC$  es tallen en un punt,  $O$ , anomenat *circumcentre* del triangle (la *mediatriu* d'un segment és la recta perpendicular pel seu punt mitjà; els seus punts són precisament els que equidisten dels extrems del segment). Així, doncs, el punt  $O$  equidista dels tres vèrtexs i és, per tant, el centre de l'única circumferència que passa per ells. Aquesta circumferència s'anomena *circumferència circumscrita* del triangle  $ABC$ . També ens hi referim dient que és «la circumferència  $ABC$ » (figura 4).

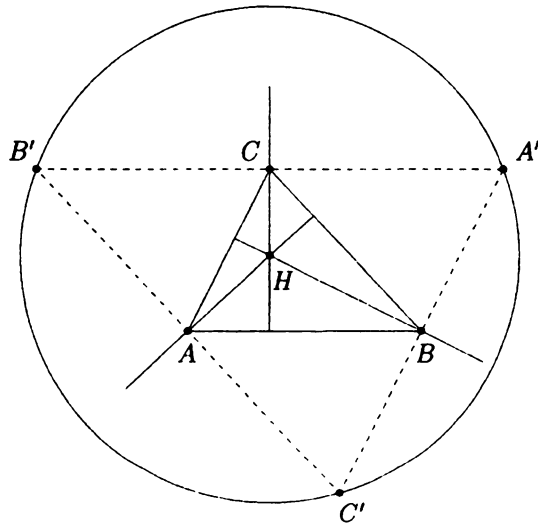
#### *Ortocentre i triangle òrtic*

Les altures d'un triangle es tallen en un punt,  $H$ , anomenat *ortocentre* del triangle (figura 5).



**Figura 5:** *Ortocentre i triangle òrtic*

Aquesta propietat és una senzilla conseqüència de l'exercici que segueix. El triangle  $PQR$  els vèrtexs del qual són els peus de les altures d'un triangle donat  $ABC$  s'anomena *triangle òrtic* de  $ABC$ .



**Figura 6:** *Circumcentre  $A'B'C' = \text{ortocentre } ABC$*

**E. 12.** Proveu que les altures d'un triangle són les mediatriss del triangle els costats del qual són les paral·leles pels vèrtexs del primer triangle als corresponents costats oposats (figura 6).

## Geometria

### Incentre

Les bisectrius dels angles d'un triangle es tallen en un punt,  $I$ , anomenat *incentre* del triangle (figura 7).

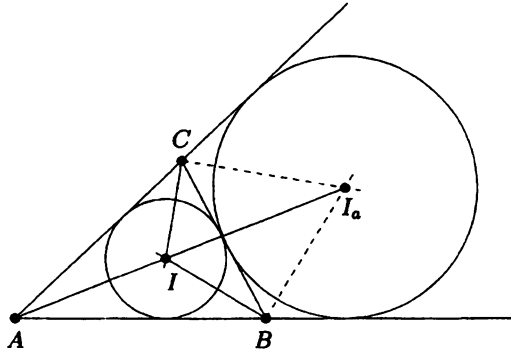


Figura 7: Incentre i excentre

La *bisectriu* d'un angle és la recta que el divideix en dos angles iguals; els seus punts són precisament els que equidisten dels dos costats de l'angle. Així, doncs, el punt  $I$  equidista dels tres costats i és, per tant, el centre de la *circumferència inscrita* al triangle, és a dir, la circumferència que és tangent als tres costats.

### Excentres

Les bisectrius exteriors de dos angles  $B$  i  $C$  d'un triangle es tallen en un punt  $I_a$  que equidista de les perllongacions dels dos costats ( $c$  i  $b$ ) del tercer angle  $A$  i del costat  $a$  oposat a  $A$ . Per tant, la bisectriu de  $A$  també passa per  $I_a$ , i així  $I_a$  és el centre d'una circumferència que és tangent al costat  $a$  del triangle i a les perllongacions de  $b$  i  $c$  (vegeu la figura 7). Es diu que el punt  $I_a$  és l'*excentre* del triangle relatiu al costat  $a$ . Els excentres  $I_b$  i  $I_c$  es defineixen anàlogament. Del fet que la bisectriu i la bisectriu exterior d'un angle d'un triangle siguin perpendiculars  $[\perp]$ , se'n dedueix sense dificultat que les bisectrius d'un triangle són les altures del triangle  $I_a I_b I_c$ .

## Circumferències i angles

La relació que hi ha entre un angle i una circumferència té propietats i aplicacions remarcables. Aquesta secció en conté una mostra.

### Angle inscrit en una circumferència

Un angle inscrit en una circumferència (és a dir, un angle el vèrtex del qual està sobre la circumferència) és la meitat de l'angle central corresponent a l'arc comprès per aquell. És

clar, doncs, que el valor de l'angle només depèn de l'arc que comprèn i no de la posició del seu vèrtex sobre la circumferència (figura 8).

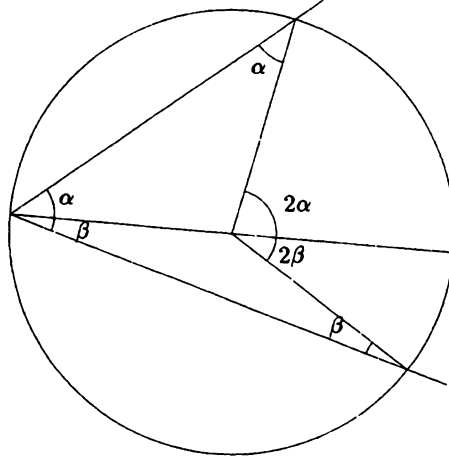


Figura 8: Angles inscrits en una circumferència

**E. 13.** Dos triangles rectangles amb la mateixa hipotenusa tenen la mateixa circumferència circumsrita. A més, el centre d'aquesta circumferència és el punt mitjà de la hipotenusa compartida.

**E. 14.** Donat un triangle  $ABC$ , siguin  $P, V \in [BC]$  el peu de l'altura de  $A$  i el punt d'intersecció de la bisectriu de  $\hat{A}$  amb  $BC$ . Siguin  $D$  i  $E$  els peus de les perpendiculars a  $AB$  i  $AC$  per  $P$  i  $V$ , respectivament. Demostreu que si  $\alpha = \hat{A}/2$ , llavors  $\widehat{DPB} = \widehat{EPC} = \alpha$ .

Un angle inscrit en una circumferència és recte quan l'arc que comprèn és una semicircumferència (vegeu la figura 9.a). Aquesta propietat es pot usar per trobar les tangents a una circumferència  $C$  des d'un punt  $P$  exterior: són (figura 9.b) les rectes que uneixen  $P$  amb els punts d'intersecció de  $C$  amb la circumferència que té per diàmetre el segment  $OP$ , on  $O$  és el centre de  $C$ .

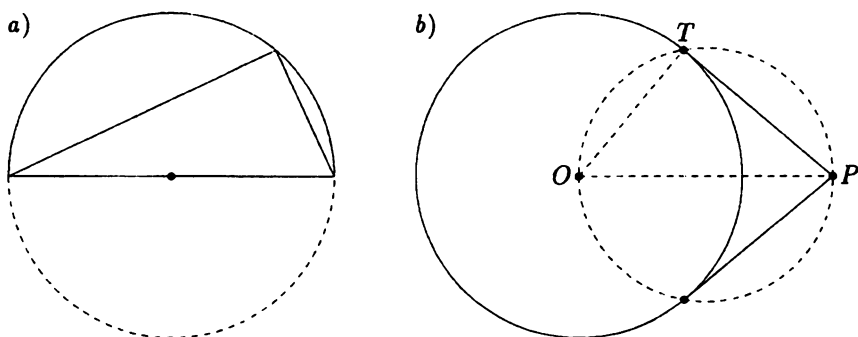
### Angle interior i angle exterior

Un angle el vèrtex del qual és exterior a una circumferència i els dos costats del qual la tallen (s'admet també que un costat de l'angle, o els dos, siguin tangents), és la semidiferència dels dos angles centrals corresponents als dos arcs de la circumferència determinats per l'angle.

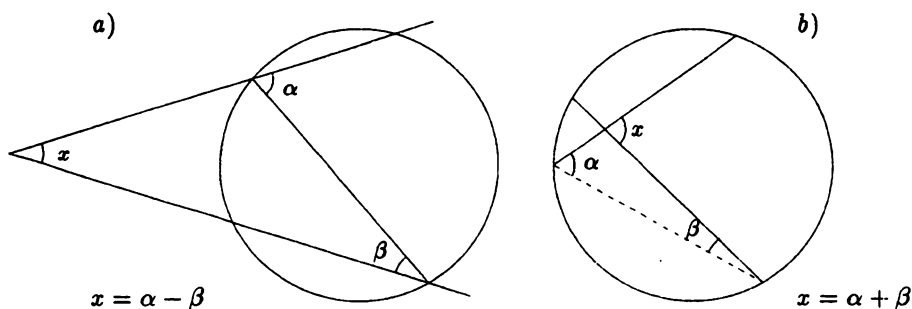
Aquesta propietat és una conseqüència immediata del fet que un angle interior  $x$  d'un triangle és, amb les notacions de la figura 10.a, la diferència dels angles  $\alpha$  i  $\beta$ .

Anàlogament, un angle, el vèrtex del qual és interior a una circumferència, és la semisuma dels angles centrals corresponents als dos arcs determinats per l'angle (figura 10.b).

## Geometria



**Figura 9:** a) Angle recte inscrit. b) Tangents des d'un punt a una circumferència



**Figura 10:** Angles exterior i interior a una circumferència

### Arc capaç

Donat un segment  $AB$  i un angle  $\alpha$ , el lloc geomètric dels punts  $P$  d'un dels semiplans definits per  $AB$  i tals que  $\widehat{APB} = \alpha$ , és un arc de circumferència els extrems del qual són  $A$  i  $B$  (d'aquest arc, se'n diu que és l'arc capaç de l'angle  $\alpha$  respecte del segment  $AB$ ). Vegem com es pot construir.

Suposem primer que  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Sobre la mediatriu de  $AB$  (vegeu la figura 11), i en el semiplà en qüestió (a la figura 11 suposem que és el semiplà per sobre de  $AB$ ), considerem el punt  $O$  tal que  $\widehat{AOM} = \alpha$ , on  $M$  és el punt mitjà de  $AB$ . Llavors, els punts  $P$  de la circumferència de centre  $O$  i radi  $OA$  que pertanyen a l'esmentat semiplà són precisament els que compleixen  $\widehat{APB} = \alpha$  i formen, amb les notacions de la figura 11, l'arc  $APB$ . Si ara ens fixem que l'arc  $AP'B$  és el capaç de  $\pi - \alpha$  respecte de  $AB$  en el semiplà oposat, esdevé també clar com podem construir l'arc capaç d'un angle  $\beta \in (\pi, 2\pi]$ .

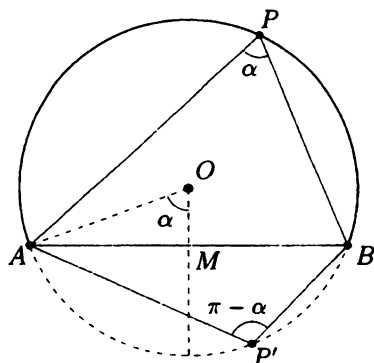


Figura 11: Arc capaç d'un angle respecte d'un segment

**E. 15.** A la figura 12, un vaixell situat al punt  $P$  ignora les coordenades d'aquesta posició, però mitjançant un mapa pot obtenir les dels punts  $A$ ,  $B$  i  $C$  situats a la costa i mitjançant un goniòmetre pot determinar els angles  $\alpha$  i  $\beta$ . Podeu obtenir les coordenades de  $P$ , sabent que  $A \equiv (6, 5)$ ,  $B \equiv (10, 28)$ ,  $C \equiv (43, 48)$ ,  $\alpha = 1,04754$  rad i  $\beta = 0,53791$  rad?

### Criteri CAA

Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat, un angle contigu a aquest costat i l'angle oposat. En particular, dos triangles rectangles són iguals si tenen iguals les hipotenuses i un angle agut. Aquestes afirmacions es poden obtenir aplicant el subapartat anterior. En particular, la construcció d'un triangle, del qual coneixem un costat, un dels seus angles contigus i l'angle oposat, es pot fer fàcilment construint l'arc capaç de l'angle oposat.

## 2 Semblances

En la geometria clàssica, les idees relacionades amb la noció de semblança de figures hi tenen un paper important. Per les necessitats d'aquest capítol, els enunciats més útils són els següents criteris de semblança de triangles:

**Criteri CAC.** Dos triangles són semblants si tenen un angle igual i els corresponents costats proporcionals.

**Criteri AA.** Dos triangles són semblants si tenen iguals dos angles corresponents.

**Criteri CCC.** Dos triangles són semblants si els corresponents costats són proporcionals.

## Geometria

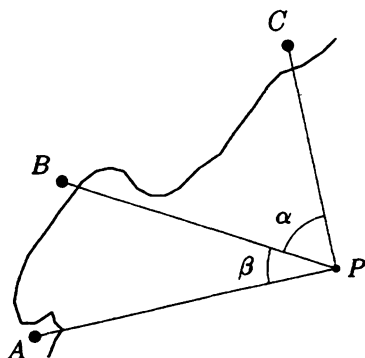


Figura 12: Un vaixell determina la seva posició

El lector que no tingui dubtes sobre el significat d'aquests criteris, pot ometre l'apartat que segueix i continuar la lectura a l'apartat «Semblances i geometria del triangle».

## Generalitats

En aquest apartat exposem breument els conceptes i enunciats més rellevants relatius a les semblances. Primer considerem els desplaçaments. Després el teorema de Tales, que és l'eina essencial per a l'estudi de les homotècies, i tot seguit les semblances en general. Finalment, revisem les relacions que hi ha entre el producte dels nombres complexos i les semblances.

### Desplaçaments

Un *desplaçament* del pla és una transformació que conserva les distàncies. Els desplaçaments conserven els angles. Un desplaçament es diu *directe* si conserva l'orientació del pla; altrament, es diu *invers*. Les translacions i els girs són exemples de desplaçaments directes. Donats dos punts  $P$  i  $P'$ , posarem  $t_{PP'}$  per denotar l'única translació que transforma  $P$  en  $P'$ . Donats un punt  $O$  i un angle  $\alpha$ , el gir de centre  $O$  i amplitud  $\alpha$  serà denotat  $g_{O,\alpha}$ .

Les simetries són exemples de desplaçaments inversos. La *simetria* respecte de la recta  $\ell$  serà denotada  $s_\ell$ : és la transformació  $P \mapsto P'$  tal que  $P'$  és el simètric de  $P$  respecte de  $\ell$ . La recta  $\ell$  s'anomena *eix* de la simetria.

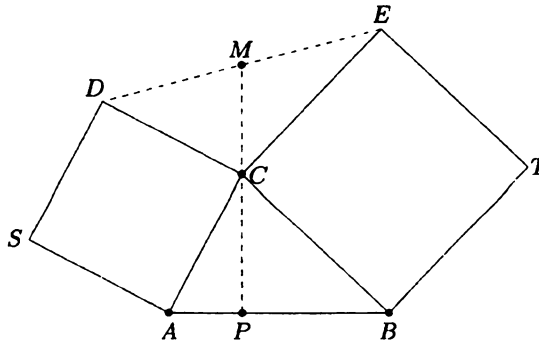
Es pot veure que els punts fixos d'un desplaçament directe el classifiquen, en el sentit següent: si no té punts fixos, és una translació; si té exactament un punt fix, és un gir; si té més d'un punt fix és la identitat. Pel que fa als desplaçaments inversos, hi ha dos casos: si té punts fixos, es tracta d'una simetria; altrament, és la composició  $ts_\ell$  d'una simetria  $s_\ell$  amb una translació  $t$  en la direcció de l'eix  $\ell$  (es parla d'una *simetria amb lliscament*).

**E. 16.** Siguin  $s$  i  $s'$  les simetries respecte de les rectes  $\ell$  i  $\ell'$ . Per estudiar quin desplaçament és la composició  $s's$ , sigui  $\alpha$  l'angle format per  $\ell$  i  $\ell'$  i posem  $O$  per denotar el punt d'intersecció

S. Xambó

de  $\ell$  i  $\ell'$  quan  $\alpha \neq 0$ , i  $d$  per denotar la distància entre  $\ell$  i  $\ell'$  quan  $\alpha = 0$  (rectes paral·leles). Demostreu que  $s's$  és el gir de centre  $O$  i amplitud  $2\alpha$  si  $\alpha \neq 0$ , i la translació de magnitud  $2d$  segons la direcció perpendicular de  $\ell$  a  $\ell'$  si  $\alpha = 0$ . Noteu que  $s's$  es la identitat si  $\ell = \ell'$ .

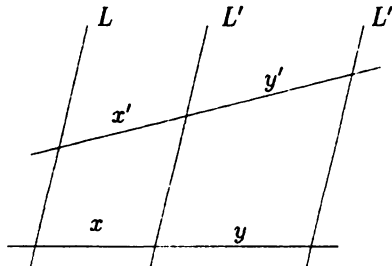
**E.17.** Sigui  $ABC$  un triangle i construïm quadrats  $ACES$  i  $BCDT$  com a la figura 13. Demostreu que el punt  $M$  d'intersecció de l'altura  $h_C$  amb  $ED$  és el punt mitjà del segment  $ED$ .



**Figura 13:** L'altura de  $C$  passa pel punt mitjà de  $DE$

**Teorema de Tales**

Si dues rectes són tallades per un sistema de rectes paral·leles, els segments així obtinguts sobre una de les rectes són proporcionals als corresponents segments obtinguts sobre l'altra (figura 14).



**Figura 14:** Teorema de Tales:  $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \dots$

**E.18.** Si a la figura 14 les rectes  $L$  i  $L'$  són paral·leles i  $x/x' = y/y'$ , llavors  $L''$  també és paral·lela a  $L$ .

## Geometria

**E. 19** (Teorema de Menelau). Sigui  $ABC$  un triangle i  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  punts sobre les rectes  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ , respectivament. Demostreu que  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  estan alineats si i només si

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1;$$

convenim que un quocient com ara  $BX/CX$  és positiu o negatiu segons que  $X$  sigui exterior o interior al segment  $[BC]$  (indicació: si  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  estan sobre una recta  $L$  i  $d_A$ ,  $d_B$  i  $d_C$  indiquen les distàncies de  $A$ ,  $B$  i  $C$  a  $L$ , respectivament, amb el convenció que aquestes distàncies es compten com a positives a un costat de  $L$  i com a negatives a l'altre, llavors es compleix la relació  $BX/CX = d_B/d_C$ , i les anàlogues per  $Y$  i  $Z$ ).

### Homotècies

L'*homotècia de centre*  $O$  (un punt) i *mòdul* o *raó*  $k$  (un nombre real no nul) és la transformació  $A \mapsto A'$  tal que  $O' = O$  i, si  $A \neq O$ ,  $A'$  és el punt de la recta  $OA$  tal que  $OA'/OA = k$  (aquí fem el convenció que  $A'$  és de la semirecta  $OA$  si  $k > 0$  i de la semirecta oposada a  $OA$  si  $k < 0$ ). Els enunciat que segueixen es proven fàcilment emprant el teorema de Tales i l'exercici E.18.

La transformació d'una recta per una homotècia és una recta paral·lela a la primera. Val un enunciat anàleg per segments. D'aquí en resulta que angles homòlegs per una homotècia són iguals.

Les rectes pel centre d'homotècia són fixes, i són les úniques rectes fixes si  $k \neq 1$  (si  $k = 1$ , l'homotècia és la identitat).

Segments homòlegs per una homotècia són proporcionals segons el valor absolut  $|k|$  de la raó d'homotècia. D'aquí resulta que la transformació de la circumferència de centre  $P$  i radi  $r$  per l'homotècia  $h$  de raó  $k$  és la circumferència de centre  $h(P)$  i radi  $|k|r$ .

**E. 20.** Dos triangles no congruents són homotètics si els costats d'un són paral·lels als corresponents costats de l'altre.

**E. 21.** Dues circumferències sempre són homotètiques i els seus centres estan alineats amb el centre de qualsevol homotècia que transformi l'una en l'altra.

### Figures semblants

Dues figures són semblants si una es pot obtenir de l'altra mitjançant la composició d'una homotècia i un desplaçament. Una semblança transforma rectes en rectes i segments en segments. Segments homòlegs són proporcionals i angles homòlegs són iguals. Una semblança es diu *directa* o *inversa* segons que conservi l'orientació del pla o la inverteixi.

**E. 22.** Proveu els criteris de semblança de triangles enunciat al principi d'aquesta secció.

## S. Xambó

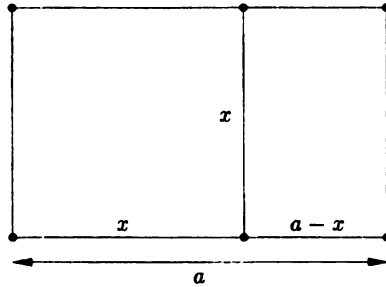
**Raó àuria.** Donat un segment de longitud  $a > 0$ , el seu *segment auri* és el segment de longitud  $x > 0$  tal que  $a/x = x/(a-x)$ . Com que aquesta relació és equivalent a l'equació  $x^2 + ax - a^2 = 0$ , obtenim que  $x = \rho a$ , on

$$\rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

El nombre real  $\rho$  s'anomena la *raó àuria*. Com que  $\rho^2 + \rho - 1 = 0$ , resulta que

$$\rho^{-1} = 1 + \rho = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Un *rectangle auri* és aquell pel qual la base menor és segment auri de la base major. Això equival a dir que el rectangle és semblant al que resulta de separar-ne el quadrat de costat la base menor (figura 15).



**Figura 15:** *Rectangle auri*

### *Semblances i nombres complexos*

Si representem els punts del pla per nombres complexos, i  $w = r_\alpha = r \cdot 1_\alpha$  és el nombre complex de mòdul  $r$  i argument  $\alpha$ , llavors la transformació  $z \mapsto wz$  és la composició del gir d'angle  $\alpha$  amb centre a l'origen seguit de l'homotècia de raó  $r$  amb el mateix centre. La raó d'això és que el mòdul i l'argument d'un producte de dos nombres complexos són el producte i la suma dels mòduls i arguments dels factors, respectivament ( $|wz| = |w||z|$  i  $\arg(wz) = \arg(w) + \arg(z)$ ).

**E. 23.** Siguin  $ABC$  i  $A'B'C'$  dos triangles i interpretem  $B - A$ ,  $C - A$ ,  $B' - A'$  i  $C' - A'$  com a nombres complexos. Demostreu que  $ABC$  i  $A'B'C'$  són directament semblants si i només si  $(C' - A')/(B' - A') = (C - A)/(B - A)$ .

**E. 24.** Siguin  $A_1A_2A_3$  i  $A'_1A'_2A'_3$  dos triangles directament semblants. Sigui  $t \in \mathbb{R}$  fix i definim  $A''_i = A_i + t(A'_i - A_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Demostreu que els triangles  $A_1A_2A_3$  i  $A''_1A''_2A''_3$  són directament semblants. Val la mateixa conclusió si tenim, en lloc de triangles, figures directament semblants  $A_1A_2 \dots A_k$  i  $A'_1A'_2 \dots A'_k$  i definim  $A''_i$  com abans per  $i = 1, 2, \dots, k$  (a la figura 16 il·lustrem el cas en què la figura és un pentàgon regular).

## Geometria

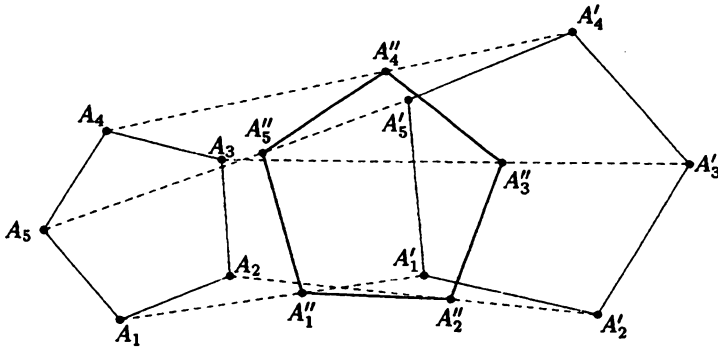


Figura 16:  $A''_i$  divideix  $A_iA'_i$  en la proporció  $3/5$

En la resta d'aquesta secció presentem, agrupades en dos apartats, un nombre de situacions geomètriques en les quals les semblances són l'element decisiu per provar els enunciats.

### Semblances i la geometria del triangle

Vegem tot seguit algunes de les aplicacions més bàsiques de les semblances a l'estudi de les propietats del triangle.

#### Mitjanes i baricentre

Les tres mitjanes es tallen en un punt,  $G$ , anomenat *baricentre* del triangle. Si  $A$  és un vèrtex qualsevol i  $A'$  el punt mitjà del costat oposat a  $A$ , llavors  $GA = 2GA'$  o, equivalentment,  $AA' = 3GA'$  (vegeu la figura 17 i noteu que els triangles  $ABG$  i  $A'B'G$  són semblants, pel criteri AAA de semblança, i que  $A'B' = \frac{1}{2}AB$ ).

#### Teorema de l'altura

L'altura sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle és la mitjana proporcional entre els dos segments en què el peu de l'esmentada altura divideix la hipotenusa. En símbols,  $CP^2 = AP \cdot BP$ , on el triangle  $ABC$  se suposa rectangle en el vèrtex  $C$  i on  $P$  és el peu de l'altura del vèrtex  $C$  (vegeu la figura 18). En efecte, els triangles  $BPC$  i  $CPA$  són semblants, ja que tenen els tres angles iguals (recordem que dos angles són iguals si els seus corresponents costats són perpendiculars). Així, doncs,  $x/h = h/(a-x)$ , igualtat que equival a la relació enunciativa.

#### Teorema del catet

Amb les mateixes notacions de la figura 18, els triangles  $BPC$  i  $BCA$  són semblants, ja que són rectangles i tenen un angle comú. Per tant,  $x/a = a/c$ , la qual cosa ens diu que en un

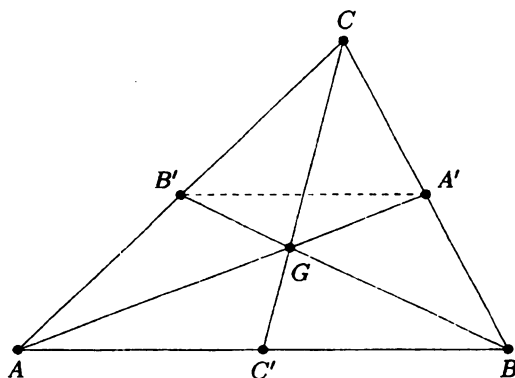


Figura 17: Baricentre d'un triangle

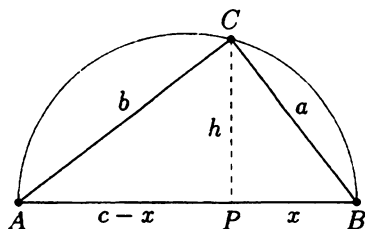


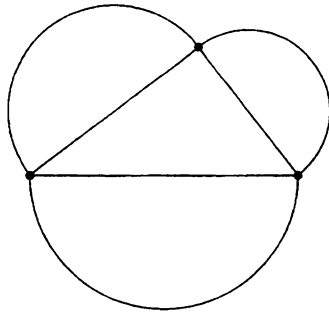
Figura 18: Teoremes de l'altura i del catet

triangle rectangle la longitud d'un catet, per exemple  $a$ , és la mitjana proporcional entre la hipotenusa,  $c$ , i la projecció del catet,  $x$ , sobre aquella. Per a una altra demostració, i també una interpretació, vegeu l'exercici E.6.

Així, tenint en compte el subapartat anterior, tenim que els triangles rectangles  $ABC$ ,  $ACP$  i  $CBP$  són semblants. És clar, a més a més, que l'àrea de  $ABC$  és la suma de les àrees de  $ACP$  i  $CBP$ . Això ens proporciona una nova comprensió del teorema de Pitàgores: si el quocient de l'àrea del quadrat de costat  $AB$  per la del triangle  $ABC$  és  $k$ , és a dir, si  $c^2 = k \cdot ABC$ , llavors  $a^2 = k \cdot CBP$  i  $b^2 = k \cdot ACP$ , d'on  $a^2 + b^2 = k(CBP + ACP) = k \cdot ABC = c^2$ . Notem que aquest argument prova que si apliquem una mateixa construcció sobre la hipotenusa i els catets d'un triangle rectangle (suposant que la construcció proporcioni una àrea a partir d'un segment), llavors l'àrea de la figura sobre la hipotenusa és la suma de les àrees de les figures sobre els catets.

Per exemple, si la construcció és la del polígon regular de  $n \geq 3$  costats sobre un segment donat, obtenim que l'àrea del  $n$ -gon regular de costat la hipotenusa d'un triangle rectangle és la suma de les àrees dels  $n$ -gons regulars els costats dels quals són els catets. Anàlogament, tenim que l'àrea del semicercle que té per diàmetre la hipotenusa és la suma de les àrees dels semicercles que tenen per diàmetre els catets (figura 19).

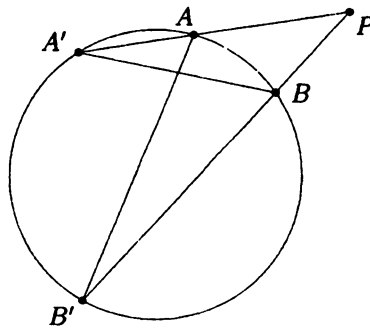
## Geometria



**Figura 19:** Teorema de Pitàgores per semicercles

### Potència d'un punt respecte d'una circumferència

Sigui  $P$  un punt i  $C$  una circumferència que no passa per  $P$ . Considerem dues rectes per  $P$  que tallen  $C$  en els punts  $A$  i  $A'$ ,  $B$  i  $B'$ , respectivament (figura 20). Aleshores els triangles  $PAB'$  i  $PBA'$  són semblants, ja que tenen dos angles iguals, i per tant  $PA/PB = PB'/PA'$ , o bé  $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$ . Així doncs, el producte  $PA \cdot PA'$  és independent de la recta que prenguem per  $P$  (entre les que tallen  $C$ ) i el seu valor s'anomena *potència de  $P$  respecte de  $C$* . Prenent la recta que passa per  $P$  i pel centre de  $C$ , veiem que la potència és igual a  $(d - r)(d + r) = d^2 - r^2$ , on  $d$  és la distància de  $P$  al centre de  $C$  i  $r$  el radi de  $C$ .



**Figura 20:** Potència d'un punt respecte d'una circumferència

**Punts concíclics.** Ara no hi ha dificultat a deduir que si  $A$  i  $A'$ ,  $B$  i  $B'$ , són dues parelles de punts distints i les rectes  $AA'$  i  $BB'$  es tallen en un punt  $P$ , aleshores els punts  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  i  $B'$  són *concíclics* (això és, estan continguts en una mateixa circumferència) si i només si  $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$ .

**Eix radical.** El lloc geomètric dels punts que tenen la mateixa potència respecte de dues circumferències no concèntriques és una recta perpendicular a la que uneix els seus centres  $O_1$  i  $O_2$ , i s'anomena *eix radical* de les dues circumferències. En efecte, siguin  $d_1$  i  $d_2$  les distàncies d'un punt  $P$  als centres de les dues circumferències, i siguin  $r_1$  i  $r_2$  els seus radis. La condició que la potència de  $P$  sigui la mateixa respecte de les dues circumferències és  $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$ , o bé  $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$ . Com que  $\delta = r_1^2 - r_2^2$  és constant, el lloc geomètric és el dels punts  $P$  tals que  $d_1^2 - d_2^2 = \delta$ , que sabem que és la recta perpendicular a  $O_1O_2$  pel punt que està a la distància  $\delta/(2c)$  del punt mitjà del segment  $[O_1, O_2]$ , on  $c$  és la distància entre  $O_1$  i  $O_2$  (vegeu l'exercici E.11). És a dir, la posició del punt d'intersecció de l'eix radical amb la recta  $O_1O_2$  és  $m + (r_1^2 - r_2^2)/(2c)$ .

Si les dues circumferències es tallen, l'eix radical és la recta que uneix els dos punts d'intersecció (o la tangent comuna si són tangents). En efecte, els punts d'intersecció tenen la mateixa potència ( $= 0$ ) respecte de les dues circumferències.

**Centre radical.** El *centre radical* de tres circumferències que no tenen els centres alineats és l'únic punt que té la mateixa potència respecte de les tres circumferències. Aquest punt és la intersecció de dos qualssevol dels eixos radicals de les tres parelles de circumferències que podem formar.

### Propietats mètriques de les bisectrius

Considerem el triangle  $ABC$  de la figura 21.

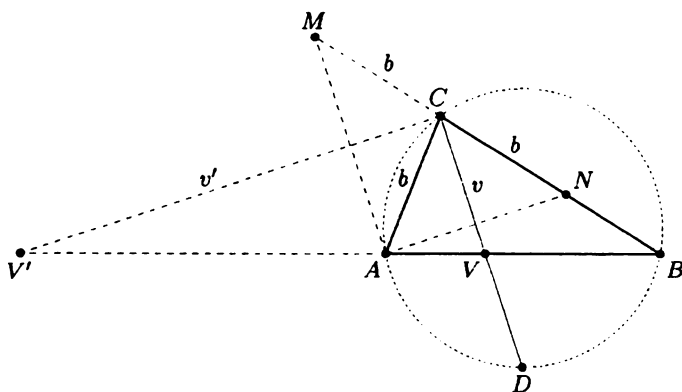


Figura 21: Determinació de les bisectrius

Sigui  $M$  el punt sobre  $BC$ , a continuació de  $C$ , tal que  $CM = b$ . Per construcció, el triangle  $ACM$  és isòceles. Per tant, la bisectriu  $v'$  de  $\widehat{ACM}$  és perpendicular a la base  $AM$ . Com que la bisectriu  $v$  és perpendicular a  $v'$ ,  $v$  és paral·lela a  $AM$ . Aplicant el teorema de Tales, obtenim que

$$\frac{BV}{a} = \frac{VA}{b} = \frac{c}{a+b}.$$

Considerant el punt  $N$  del segment  $BC$  tal que  $NC = b$ , resulta que  $AN$  és paral·lela a  $v'$ , i

## Geometria

raonant de manera similar, obtenim que

$$\frac{BV'}{a} = \frac{AV'}{b} = \frac{c}{a-b}.$$

Per altra banda, no és difícil veure que si  $D$  és el punt d'intersecció de la semirecta  $CV$  amb el cercle  $ABC$ , llavors els triangles  $AVC$  i  $DBC$  són semblants (tenen dos angles iguals: un per definició de bisectriu, l'altre pel fet de ser angles inscrits que comprenen el mateix arc  $BC$  de la circumferència  $ABC$ ). En resulta que  $a/v = (v + VD)/b$ , o bé  $ab = v^2 + v \cdot VD$ . Però com que  $v \cdot VD = VA \cdot VB = abc^2/(a+b)^2$ , tenim que

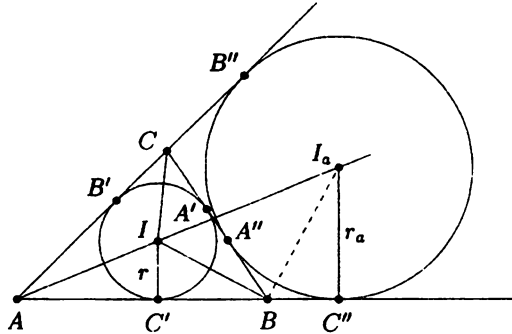
$$v^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} = 4ab \frac{p(p-c)}{(a+b)^2}$$

on hem posat  $p = (a+b+c)/2$  (el *semiperímetre* del triangle).

**E. 25 (Steiner-Lehmus).** Si en un triangle dues bisectrius són iguals, llavors el triangle és isòsceles.

### *Radi de les circumferències inscrita i exinscrita*

Considerem la figura 22. Si posem  $p = (a+b+c)/2$ , aleshores es compleix que  $AB' = AC' = p-a$ : la primera igualtat és clara i la segona resulta del fet que  $AB' + a = AB' + CA' + A'B = AB' + CA' + BC' = p$ . De la mateixa manera tenim que  $BA' = BC' = p-b$  i  $CA' = CB' = p-c$ . També tenim  $AB'' = AC''$  i com que  $AB'' = AC + CA''$  i  $AC'' = AB + BA''$ , veiem que  $AB'' = AC'' = p$  [o]. Per tant  $BA'' = BC'' = p-c$  i  $CB'' = CA'' = p-b$ . Finalment,  $C'C'' = B'B'' = AB'' - AB' = p - (p-a) = a$  i  $A'A'' = |BA' - BA''| = |p-b - (p-c)| = |b-c|$ .



**Figura 22:** Radi de les circumferències inscrita i exinscrita

Atès que els triangles  $AIC'$  i  $AI_aC''$  són semblants, serà  $r/r_a = (p-a)/p$ . I atès que els triangles  $BIC'$  i  $I_aBC''$  també són semblants,  $r/(p-b) = (p-c)/r_a$ , o bé  $rr_a = (p-b)(p-c)$ . De les dues equacions obtingudes es dedueix que

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \quad r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

## S. Xambó

Els radis  $r_b$  i  $r_c$  de les altres dues circumferències exinscrites s'obtenen permutant cíclicament  $a, b$  i  $c$  en la segona de les fórmules anteriors.

### *Expressió de les altures en funció dels costats*

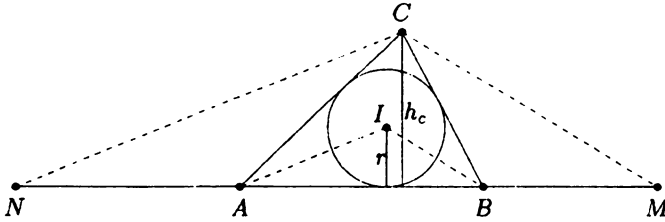
Considerem la figura 23, en la qual  $N$  i  $M$  es defineixen de manera que estiguin alineats amb  $A$  i  $B$ , respectivament, amb  $BM = BC$  i  $AN = AC$ . Així doncs,  $NM = a + b + c = 2p$ . Per les consideracions fetes al subapartat «Propietats mètriques de les bisectrius» (pàg. 63), sabem que  $CM$  (respectivament,  $CN$ ) és paral·lela a la bisectriu interior  $IB$  (respectivament,  $IA$ ), de manera que els triangles  $AIB$  i  $NCM$  són semblants. En resulta que  $h_c/r = 2p/c$ , d'on

$$h_c = 2pr/c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

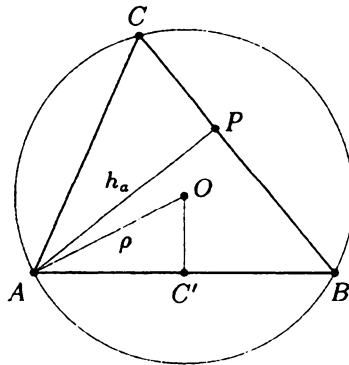
Canviant  $c$  per  $b$  i per  $a$  s'obtenen les fórmules que donen  $h_b$  i  $h_a$ .

D'aquestes expressions és clar que l'àrea  $S$  del triangle és donada per la fórmula d'Heron:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



**Figura 23:** Altures en funció dels costats



**Figura 24:** Radi de la circumferència circumscrita

## Geometria

### Radi de la circumferència circumsrita

Considerem la figura 24. Els triangles  $APC$  i  $AC'O$  són semblants: els dos són rectangles i  $\widehat{AOC'}$  és la meitat de l'arc central comprès per l'angle inscrit  $\widehat{ACB}$ . Així, doncs,  $AO/AC' = AC/AP$ , o bé  $\rho/(c/2) = b/h_a$ . Per tant,  $\rho = bc/2h_a$  i, introduint l'expressió de  $h_a$  en funció dels costats,

$$\rho = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Notem també que si  $\gamma = \widehat{C}$  i  $c = AB$ , llavors  $c/\sin(\gamma) = 2AC'/\sin(\gamma) = 2\rho$ , ja que  $AC'/\rho = \sin(\gamma)$ . Això ens revela que el valor  $a/\sin(\alpha) = b/\sin(\beta) = c/\sin(\gamma)$  (teorema dels sinus) és  $2\rho$ , el diàmetre de la circumferència circumsrita.

### Inversions

Donat un punt  $O$  i un nombre real  $\rho \neq 0$ , la *inversió de centre  $O$  i potència  $\rho$* ,  $\text{inv}_{O,\rho}$ , és l'aplicació  $A \mapsto A'$  ( $A \neq O$ ), definida per la fórmula

$$A' - O = \frac{\rho}{|OA|^2}(A - O).$$

Així  $A'$  és el punt que està sobre la recta  $OA$ , a una distància  $|\rho|/|OA|$  de  $O$ , a la mateixa semirecta que  $A$  si  $\rho > 0$  i a la semirecta oposada si  $\rho < 0$ . Atès que  $|OA'| = |\rho|/|OA|$ , tenim  $A'' = A$  (ho expressarem dient que la  $\text{inv}_{O,\rho}$  és *involutiva*).

Si  $\rho > 0$  i posem  $r = \sqrt{\rho}$ , llavors els punts  $A$  que  $\text{inv}_{O,\rho}$  deixa fixos són els de la circumferència de centre  $O$  i radi  $r$ , ja que si  $|OA| = r$  llavors  $\rho/|OA|^2 = 1$ . En aquest cas es diu també que  $\text{inv}_{O,\rho}$  és la inversió respecte de la circumferència  $S = S(O, r)$  de centre  $O$  i radi  $r$ , i que  $A'$  és l'invers de  $A$  respecte de  $S$ . Pel que ja hem dit, també es té que  $A$  és l'invers de  $A'$  respecte de  $S$ .

**Construcció.** El punt  $A'$  invers de  $A$  respecte de  $S$  es pot construir de la següent manera. Suposem primer que  $|OA| > r$ . Si  $P$  i  $Q$  són els punts d'intersecció de la circumferència de centre  $A$  i radi  $|OA|$  amb  $S$ , llavors els punts d'intersecció de les circumferències de radi  $r$  amb centres a  $P$  i  $Q$  són  $O$  i  $A'$  (figura 25).

En efecte, els triangles  $AOP$  i  $OPA'$  són semblants, ja que per construcció són isòsceles i comparteixen l'angle del vèrtex  $O$ . Per tant,  $|OA|/|OP| = |OP|/|OA'|$ , que equival a  $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ , on  $r = |OP|$ . Per construir l'invers d'un punt interior de  $S$  respecte de  $S$ , és suficient veure com podem reconstruir el punt exterior  $A$  a partir de  $A'$ . Ara bé, amb les notacions anteriors,  $PQ$  és la mediatriu de  $OA'$  i  $A$  és la intersecció de les tangents a  $S$  en els punts  $P$  i  $Q$ .

**Inversió de rectes i circumferències.** Una figura  $F'$  es diu inversa d'una figura  $F$  respecte de la circumferència  $S$  si quan  $A$  recorre els punts de  $F$  (diferents del centre  $O$  de  $S$ ), el punt  $A'$  invers de  $A$  respecte de  $S$  recorre els punts de  $F'$  (diferents de  $O$ ). Si  $F' = F$ , direm que la figura  $F$  és *doble* per la inversió. Per exemple, els punts dobles són els fixos per la inversió, és a dir, els punts de  $S$ ; per tant,  $S$  és una circumferència doble; de la definició d'inversió, en resulta immediatament que les rectes per  $O$  són dobles.

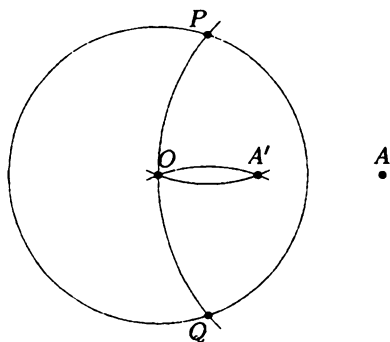


Figura 25: Construcció de l'invers de A

Una circumferència  $C$  de diàmetre  $d$  pel centre d'inversió  $O$  (figura 26.a) i la recta perpendicular  $P'A'$  al diàmetre  $OP$  de  $C$  a una distància  $d' = r^2/d$  de  $O$ , són figures inverses (notem que  $OP$  és l'únic diàmetre de  $C$  que passa per  $O$ ). En efecte, els triangles  $OPA$  i  $OA'P$  són semblants, ja que són rectangles (a  $A$  i  $P'$ , respectivament) i tenen un angle comú. Tenint en compte que  $|OP| = d$  i  $|OP'| = r^2/d$ , tenim que  $|OA|/d = r^2/d|OA'|$ , d'on  $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ . Remarquem que si  $A, B \in S$  (figura 26.b), llavors la recta  $AB$  i la circumferència  $OAB$  són figures inverses respecte de  $S$ , ja que la inversa de la recta  $AB$  és una circumferència que passa per  $O$  i pels punts dobles  $A$  i  $B$ .

Anem a veure ara que la inversa  $C'$  d'una circumferència  $C$  que no passa pel centre d'inversió  $O$  és una circumferència. De fet, veurem que si  $P$  i  $Q$  són els extrems del diàmetre de  $C$  que passa per  $O$ , llavors  $C'$  és la circumferència de diàmetre  $P'Q'$  (figura 27), on  $P'$  i  $Q'$  són els inversos de  $P$  i  $Q$  respecte de  $S$ .

En efecte, sigui  $C'$  la circumferència que acabem de definir. De  $|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \cdot |OQ'|$  obtenim  $|OP'|/|OQ| = |OQ'|/|OP|$ , valor que coincideix amb el mòdul  $k$  de l'homotècia de centre  $O$  que transforma  $C$  en  $C'$ . Sigui ara  $A$  un punt de  $C$  i determinem  $B$  i  $A'$  sobre  $C'$  com a la figura 27. Llavors  $|OB| = k|OA|$  i  $|OA'| \cdot |OB| = |OQ'| \cdot |OP'|$  (potència de  $O$  respecte de  $C'$ ). Per tant,

$$|OA| \cdot |OA'| = \frac{1}{k}|OB| \cdot |OA'| = \frac{1}{k}|OQ'| \cdot |OP'| = |OP| \cdot |OP'| = r^2,$$

i això acaba la prova.

Notem que la raó,  $k$ , de l'homotècia de centre  $O$  que transforma  $C$  en  $C'$  és igual a  $r^2/p$ , on  $p$  és la potència de  $O$  respecte de  $C$ :

$$k = \frac{|OP'|}{|OQ|} = \frac{|OP| \cdot |OP'|}{|OP| \cdot |OQ|} = \frac{r^2}{p}.$$

**E. 26.** La recta  $PQ$  que uneix dos punts  $P$  i  $Q$  d'una circumferència  $C$  que no passa pel centre  $O$  d'una circumferència  $S$  i la recta  $P'Q'$  que uneix els inversos  $P'$  i  $Q'$  de  $P$  i  $Q$  respecte de  $S$ , o bé es tallen sobre l'eix radical de  $C$  i  $C'$ , o bé aquest eix és paral·lel a ambdues rectes

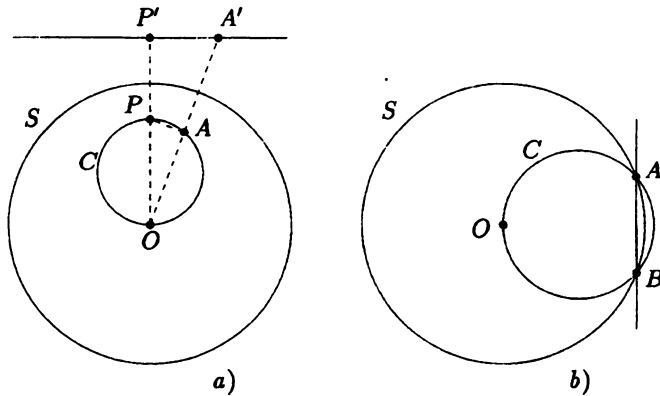


Figura 26: Inversa d'una circumferència pel centre d'inversió

(indicació: mostreu que els punts  $P, Q, P'$  i  $Q'$  estan sobre una circumferència  $K$ , amb la qual cosa el punt d'intersecció de  $PQ$  i  $P'Q'$  –si es tallen– és el centre radical de  $C, C'$  i  $K$ ).

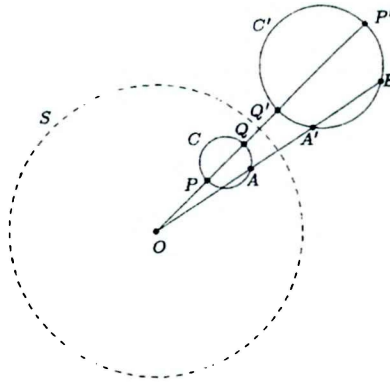
**E. 27.** Amb les notacions del problema anterior, mostreu que la recta tangent a  $C$  en un punt  $P$  i la recta tangent a  $C'$  en el punt  $P'$  formen angles iguals amb la recta  $PP'$ . A més a més, o bé es tallen sobre l'eix radical de  $C$  i  $C'$ , o bé aquest és paral·lel a ambdues.

**E. 28.** Amb les notacions de la figura 26.a, mostreu que  $\widehat{OA'P'}$  és igual a l'angle agut que  $OA$  forma amb la tangent a  $C$  pel punt  $A$  (indicació: aquest darrer angle coincideix amb l'angle agut que forma la tangent a  $C$  en el punt  $O$  amb  $OA$ ).

**Conservació dels angles.** Els exercicis anteriors es poden usar per demostrar que les inversions conserven els angles. Per precisar més, un arc serà un segment (que pot ser una semi-recta) o un arc de circumferència. Si dos arcs tenen el mateix origen, convindrem a mesurar l'angle que formen com el de les semirectes tangents als arcs en el vèrtex de l'angle. Com que les inversions transformen arcs en arcs, també transformen angles en angles i la propietat a què ens hem referit és que la mesura d'un angle coincideix amb la del seu transformat per una inversió. La demostració d'aquest fet es pot deixar com a exercici per al lector. Convé adonar-se, però, que el sentit del transformat d'un angle per una inversió és el contrari del de l'angle abans de transformar.

### 3 Problemes

Resoldre un problema, especialment un problema de geometria, és trobar un camí entre el que ens donen i el que ens demanen. Del que ens donen podem intentar *progressar* fent deduccions successives aplicant coneixements ja coneguts: és el procés de *síntesi* en el sentit dels antics grecs, i que en alguns diccionaris apareix reflectit com una de les accepcions del



**Figura 27:** *Inversa d'una circumferència  $C$  que no passa per  $O$*

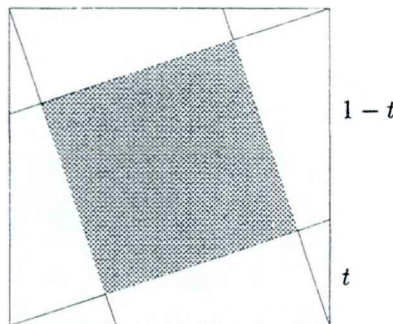
mot. Fixem-nos que els coneixements pertinents per avançar sovint esdevenen clars quan parem esment en les coses que ens donen.

A l'altra banda, allà on volem arribar, sovint és útil preguntar-se quina *mena de cosa* ens demanen, ja que les respostes a aquesta pregunta solen donar *claus* inequívokes sobre quins coneixements convé invocar per aconseguir-ho: és el procés d'*anàlisi* dels antics grecs.

Aquests principis, i d'altres, els podeu trobar il·lustrats a la mostra de solucions, presentades en forma dialogada, a la secció 4.

Una advertiment: l'ordre en el qual donem els problemes no pressuposa cap graduació progressiva de la seva dificultat.

**GE1.** Amb les notacions de la figura 28, calculeu l'àrea del quadrat interior en funció de  $t$ .



**Figura 28:** *Es demana l'àrea del quadrat gris en funció de  $t$*

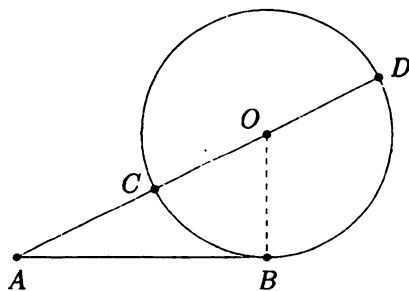
## Geometria

**GE2.** Donada una corda  $a$  d'una circumferència  $C$  de radi 1 i centre  $O$ , considereu la circumferència  $C'$  determinada imposant que  $a$  en sigui un diàmetre. Si  $P$  és el punt de  $C'$  més allunyat de  $O$ , quin és el valor màxim de la distància  $PO$ ?

**GE3.** L'angle  $\hat{A}$  d'un triangle isòsceles  $ABC$  és igual a  $2/5$  d'un angle recte i  $\hat{B} = \hat{C}$ . La bisectriu de l'angle  $\hat{C}$  talla el costat oposat en el punt  $D$ . Calculeu les valors dels angles del triangle  $BCD$ . Expressen la longitud,  $a$ , del costat  $BC$  en funció de la longitud,  $b$ , del costat  $AC$ .

**GE4.** Sigui  $ABC$  un triangle isòsceles amb  $\hat{B} = \hat{C} = 80^\circ$ . Siguin  $D \in (A, B)$  i  $E \in (A, C)$  els punts tals que  $\widehat{BCD} = 50^\circ$  i  $\widehat{CBE} = 60^\circ$ . Quants graus té l'angle  $\widehat{BED}$ ?

**GE5** (Construcció de Descartes de segments auri). A la figura 29, la circumferència és tangent a  $AB$  al punt  $B$  i el seu diàmetre és igual a  $AB$ . Demostreu que  $AB$  és el segment auri de  $AD$  i que  $AC$  és el segment auri de  $AB$ .



**Figura 29:** Una construcció geomètrica de segments auri

**GE6.** Proveu que en un pentàgon regular el costat és segment auri de la diagonal.

**GE7.** Donat un punt  $P$  interior a un triangle  $ABC$ , siguin  $X, Y$  i  $Z$  els peus de les perpendiculars des de  $P$  als costats  $BC, CA$  i  $AB$ , respectivament (es diu que  $XYZ$  és el *triangle pedal* del punt  $P$  relatiu al triangle  $ABC$ ). Proveu que

$$YZ = \frac{a}{2\rho} PA, \quad ZX = \frac{b}{2\rho} PB, \quad XY = \frac{c}{2\rho} PC,$$

on  $\rho$  és el radi de la circumferència circumscrita al triangle.

**GE8.** En un triangle acutangle  $ABC$ , la bisectriu interior de l'angle  $\hat{A}$  talla el costat  $BC$  en el punt  $K$  i el cercle circumscrit en el punt  $M$ . Siguin  $L$  i  $N$  els peus de les perpendiculars per  $K$  a  $AB$  i  $AC$ , respectivament. Demostreu que el quadrilàter  $ALMN$  i el triangle  $ABC$  tenen la mateixa àrea.

**GE9.** En cada un dels vèrtexs d'un quadrat, el costat del qual fa un quilòmetre, hi ha una casa, i les quatre cases volen fer camins amb els que es puguin comunicar les unes amb les altres. Què poden fer, si només disposen de materials per construir  $1 + \sqrt{3}$  km de camí?

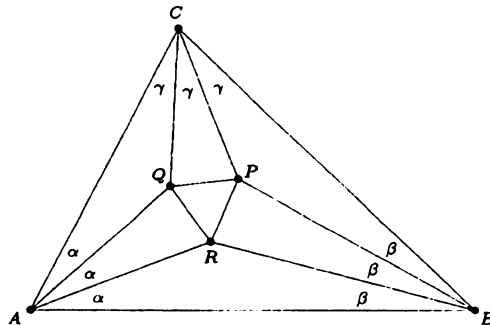
**GE10.** Proveu que els tres angles d'un triangle  $ABC$  són aguts si i només si existeixen punts  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  de l'interior dels costats  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$ , respectivament, tals que els segments  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  tenen la mateixa longitud.

**GE11.** Demostreu que qualsevol polígon convex d'àrea 1 està contingut en un rectangle d'àrea no superior a 2.

**GE12** (Teorema de Morley). Donat un triangle  $ABC$ , construïm el triangle  $PQR$  tal com indica la figura 30. Demostreu que

$$|QR| = 8\rho \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma),$$

on  $\rho$  és el radi de la circumferència circumscrita a  $ABC$ . Notem que la simetria de la relació obtinguda mostra que el triangle  $PQR$  és equilàter, fet que és conegut com a *teorema de Morley*.



**Figura 30:** Teorema de Morley:  $PQR$  és equilàter

**GE13.** Sigui  $ABC$  un triangle i  $P$  un punt tal que  $PA = 7$ ,  $PB = 5$  i  $PC = 3$ . Demostreu que si  $ABC$  té, amb aquestes condicions, perímetre màxim, llavors  $P$  és l'incentre de  $ABC$ .

**GE14.** Siguin  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  i  $S$  els centres dels quadrats construïts externament sobre els quatre costats d'un rombe. Demostreu que  $PQRS$  és un quadrat. Si fixem el centre, el costat i l'orientació del rombe, i deixem que l'angle entre dos costats contigus variï, quin lloc geomètric descriu el punt  $P$ ?

**GE15.** Proveu que un quadrilàter convex és circumscriptible a una circumferència si i només si les sumes dels dos parells de costats oposats són iguals.

## Geometria

**GE16.** Demostreu que la suma de les distàncies d'un punt interior a un triangle als tres vèrtexs és superior a la meitat del perímetre i inferior al perímetre.

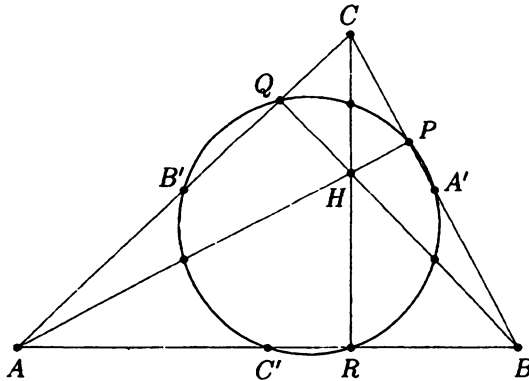
**GE17.** Sigui  $2p$  el perímetre d'un triangle i  $\mu$  la suma de les seves tres mitjanes. Demostreu que

$$\frac{3p}{2} < \mu < 2p.$$

**GE18.** Demostreu que un quadrilàter convex és inscriptible en una circumferència (és a dir, que existeix una circumferència que passa pels seus vèrtexs) si i només si té dos angles oposats suplementaris.

**GE19.** Proveu que les altures d'un triangle són les bisectrius del seu triangle òrtic (vegeu la figura 5). Resulta, així, que l'ortocentre d'un triangle coincideix amb l'incentre del seu triangle òrtic.

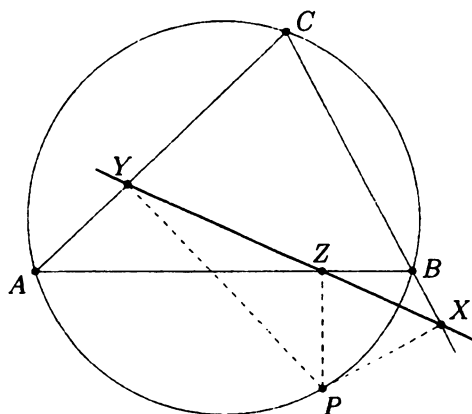
**GE20 (Cercle d'Euler).** Demostreu que els punts mitjans dels costats d'un triangle (figura 31) i els peus de les seves altures estan sobre un cercle.



**Figura 31:** Cercle d'Euler, o dels nou punts

**GE21.** El cercle d'Euler d'un triangle també passa pels punts mitjans dels segments que uneixen els vèrtexs d'un triangle amb l'ortocentre (per aquesta raó el cercle d'Euler s'anomena també *cercle dels nou punts* del triangle; figura 31).

**GE22.** Sigui  $P$  un punt,  $ABC$  un triangle i  $X, Y, Z$  els peus de les perpendiculars per  $P$  als costats  $BC, CA$  i  $AB$ , respectivament. Demostreu que  $X, Y$  i  $Z$  estan alineats si i només si  $P$  està sobre la circumferència circumscrita de  $ABC$  (en aquest cas, la recta que conté els punts  $X, Y$  i  $Z$  s'anomena *recta de Simson* de  $P$  relativa al triangle  $ABC$ ; vegeu la figura 32).



**Figura 32:** *Recta de Simson*

**GE23** (Problema de Fagnano). Demostreu que el mínim perímetre d'un triangle inscrit en un triangle acutangle donat és el del triangle òrtic (vegeu la figura 5).

**GE24.** Trobeu el punt interior d'un triangle acutangle tal que la suma de les seves distàncies als vèrtexs sigui mínima (*punt de Fermat* del triangle).

**GE25.** Demostreu que les circumferències circumscrites dels triangles equilàters construïts sobre els tres costats d'un triangle, al seu exterior, passen pel punt de Fermat. A més a més, els centres d'aquests tres triangles formen un altre triangle equilàter.

**GE26** (Teorema de Ptolemeu). En un quadrilàter convex la suma dels productes de les dues parelles de costats oposats és no inferior al producte de les dues diagonals, i la igualtat val si i només si el quadrilàter és inscripible.

**GE27.** Sigui  $ABC$  un triangle isòsceles amb  $BC$  com a costat desigual. Sigui  $Q$  el peu de l'altura pel vèrtex  $B$  i  $P$  el peu de la perpendicular a  $BC$  per  $Q$ . Trobeu l'àrea del triangle en funció de  $x = BP$  i  $y = PC$ .

**GE28.** En un triangle  $ABC$  escollim punts  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  sobre els costats  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ , respectivament. Considerem les rectes per  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  que són perpendiculars a  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ , respectivament. Proveu que les tres rectes són concurrents si i només si  $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$ .

**GE29.** Sigui  $O$  el centre d'una circumferència  $K$ ,  $AB$  un diàmetre,  $t$  la recta tangent a  $K$  en el punt  $B$ . Donat un punt  $P$  de  $K$  diferent de  $A$  i  $B$ , siguin  $C$  i  $D$  els punts d'intersecció amb  $t$  de la tangent a  $K$  pel punt  $P$  i de la recta  $AP$ . Proveu que  $BC = CD$ .

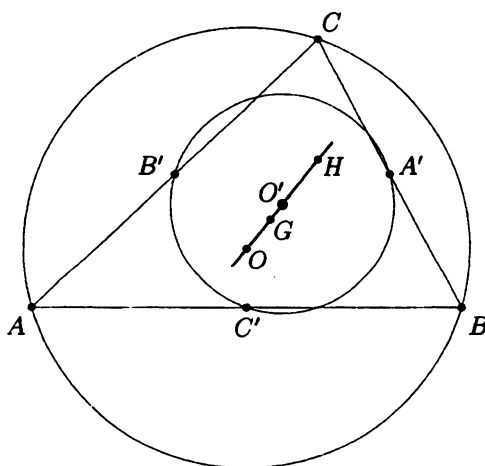
## Geometria

**GE30.** Trobeu l'àrea d'un octògon convex inscrit en una circumferència sabent que té quatre costats consecutius de longitud 2 i els altres quatre de longitud 3.

**GE31.** Siguin  $P$  i  $O$  punts fixos. Trobeu el lloc geomètric del simètric de  $P$  respecte d'una recta variable per  $O$ .

**GE32.** Sigui  $H$  l'ortocentre d'un triangle,  $P$  el peu d'una altura i  $Q$  el punt d'intersecció de la semirecta  $HP$  amb el cercle circumscrit. Demostreu que  $HP = PQ$ .

**GE33.** Proveu que el baricentre d'un triangle  $ABC$  és el punt  $G$  del segment  $HO$  tal que  $GO = \frac{1}{2}GH$  i que el punt mitjà de  $HO$  és el centre de la circumferència circumscrita en el triangle  $A'B'C'$  els vèrtexs del qual són els punts mitjans dels costats de  $ABC$  (la recta  $HO$  s'anomena *recta d'Euler* del triangle  $ABC$ ; vegeu la figura 33).

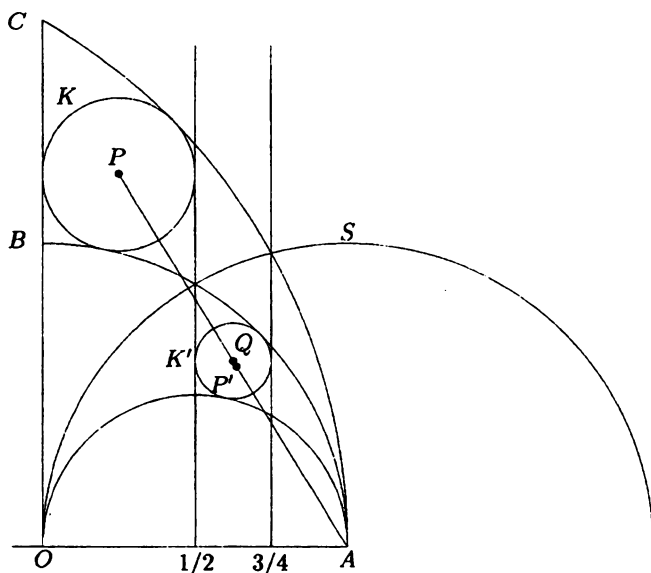


**Figura 33:** *Recta d'Euler*

**GE34.** Si la recta d'Euler d'un triangle passa per un dels vèrtexs, el triangle és rectangle o isòsceles.

**GE35.** Amb les notacions de la figura 31, sigui  $P'$  el punt de l'arc  $A'P$  del cercle d'Euler tal que  $\text{arc}(A'P') = \frac{1}{3}\text{arc}(A'P)$ . Definim  $Q'$  i  $R'$  de manera similar. Demostreu que llavors el triangle  $P'Q'R'$  és equilàter (figura 44).

**GE36.** Siguin  $A$  i  $B$  dos punts no diametralment oposats d'un cercle  $C$  donat i sigui  $XY$  un diàmetre variable de  $C$ . Determineu el lloc geomètric del punt d'intersecció de les rectes  $AX$  i  $BY$ .



**Figura 34:** Una aplicació de les inversions

**GE37** (Erdős–Mordell). Sigui  $E$  un punt a l'interior d'un triangle  $ABC$ ,  $s$  la suma de les distàncies de  $E$  als vèrtexs i  $t$  la suma de les distàncies de  $E$  als peus de les rectes per  $E$  perpendiculars als costats. Demostreu que  $s \geq 2t$ .

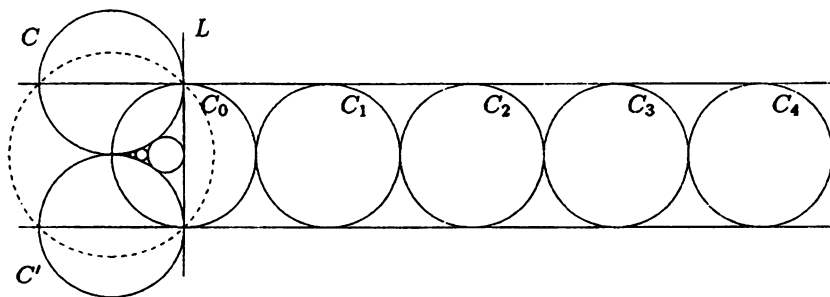
**GE38.** Sigui  $E$  un punt interior d'un triangle  $ABC$ . Siguin  $x, y$  i  $z$  les distàncies de  $E$  als vèrtexs  $A, B$  i  $C$ , respectivament, i  $p, q$  i  $r$  les distàncies de  $E$  als costats  $BC, CA$  i  $AB$ , respectivament. Llavors,

$$xyz \geq (p + q)(p + r)(q + r).$$

**GE39.** Siguin  $S$  i  $K$  circumferències diferents. Demostreu que  $K$  és doble per la inversió respecte de  $S$  si i només si  $K$  i  $S$  són ortogonals.

**GE40.** A la figura 34, l'arc  $AB$  és un quadrant de la circumferència de centre  $O$  i radi  $|OA| = 1$ , i  $AC$  és l'arc que correspon a la circumferència de radi 2 amb centre en el punt simètric de  $A$  respecte del punt  $O$ . Comproveu que  $K$  i  $K'$  són circumferències inverses respecte de la circumferència  $S$  de centre  $A$  i radi 1. Si  $P'$  és l'invers de  $A$  respecte de  $K'$ , proveu que  $P'$  i el centre  $P$  de  $K$  són inversos respecte de  $S$ . Trobeu també la posició del centre  $Q$  de  $K'$  (i noteu que  $Q$  i  $P'$  són diferents).

**GE41.** Siguin  $P$  i  $A$  dos punts diferents donats i  $O$  un punt variable en una semirecta  $\sigma$  d'origen  $A$  donada. Sigui  $S$  la circumferència de centre  $O$  i radi  $|OA|$  i  $P'$  l'invers de  $P$  respecte de  $S$ . Sigui  $L$  la recta perpendicular a  $\sigma$  pel punt  $A$ . Demostreu que el límit de



**Figura 35:** Càlcul del diàmetre de les circumferències entre  $L$ ,  $C$  i  $C'$

$P'$  quan  $O$  s'allunya indefinidament de  $A$  és el punt simètric de  $P$  respecte de la recta  $L$  (si mirem  $L$  com el límit de  $S$  quan  $O$  s'allunya indefinidament de  $A$ , veiem que podem considerar la simetria respecte de  $L$  com el límit de la inversió respecte de  $S$ ).

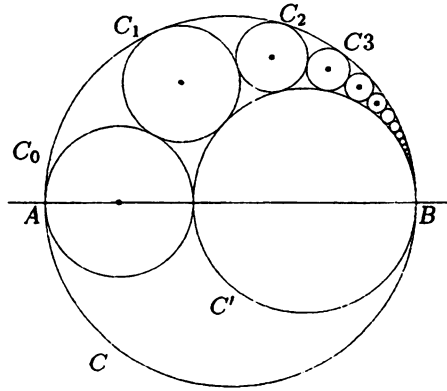
**GE42.** Sigui  $S$  una circumferència de centre  $O$ , i  $P$  i  $P'$  dos punts no pertanyents a  $S$  i diferents de  $O$ . Demostreu que les condicions següents són equivalents:

- 1)  $P$  i  $P'$  són inversos respecte de  $S$ .
- 2)  $P$  i  $P'$  estan alineats amb  $O$  i existeix una circumferència  $K$  ortogonal a  $S$  que passa per  $P$  i  $P'$ .
- 3) Existeixen dues circumferències distintes  $K$  i  $K'$  que passen per  $P$  i  $P'$  i són ortogonals a  $S$ .

**GE43.** Sigui  $S$  una circumferència de centre  $O$ ,  $L$  una recta que no passa per  $O$  i  $C = L'$  la circumferència inversa de  $L$  respecte de  $S$ . Demostreu que si  $P$  i  $Q$  són punts simètrics respecte de  $L$ , llavors els inversos  $P'$  i  $Q'$  de  $P$  i  $Q$  respecte de  $S$  són inversos respecte de  $C$  (és a dir, la simetria respecte de  $L$  i la inversió respecte de  $C$  es corresponen per la inversió respecte de  $S$ ).

**GE44.** Considerem la figura 35, en la qual  $C$  i  $C'$  són dues circumferències tangents del mateix radi  $R$ . La recta  $L$  és una tangent comuna a  $C$  i  $C'$  i les circumferències  $C'_n$  ( $n \geq 1$ ) es determinen de manera que estiguin contingudes a la regió entre  $L$ ,  $C$  i  $C'$  i que  $C'_n$  sigui tangent a  $C'_{n-1}$ ,  $C$  i  $C'$  (convenim que  $C'_0 = L$ ). Comproveu que  $C'_n$  és la inversa de  $C_n$  respecte de la circumferència puntejada i useu aquest fet per demostrar que el diàmetre de  $C'_n$  és igual a  $R/n(n+1)$  (la circumferència puntejada és la que passa pels punts de contacte de  $L$  amb  $C$  i  $C'$  i que té per centre el punt de contacte de  $C$  i  $C'$ ).

**GE45.** A la figura 36, la circumferència  $C'$  és interior, i tangent en el punt  $B$ , a la circumferència  $C$  i les circumferències  $C_0, C_1, \dots$  es construeixen tal com indica la figura. Proveu que



**Figura 36:** *Quin diàmetre té  $C_n$ ?*

el diàmetre de  $C_n$  ( $n \geq 1$ ) és igual a  $y_n/n$ , on  $y_n$  és la distància del centre de  $C_n$  a la recta  $AB$  (indicació: trobeu les inverses de  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n$  respecte de la circumferència de centre  $B$  que és ortogonal a  $C_n$ ).

## 4 La Raquel i en Pau resolen problemes

En aquesta secció donem les solucions, en forma dialogada, de cinc problemes de la llista (GE6, GE16, GE17, GE23 i GE35). Ens hem decidit a emprar aquest mitjà perquè ens ha semblat adient per intentar explicar, a més a més de la solució, algunes idees i processos que ens semblen rellevants per a la resolució de problemes de geometria. Les solucions convencionals dels mateixos problemes, que són les que, en definitiva, s'exigeixen, les podeu trobar a la secció 5.

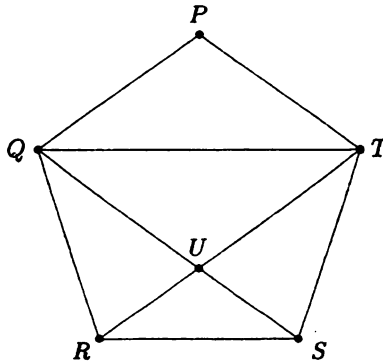
Als diàlegs, en Pau i la Raquel són estudiants dedicats a la tasca d'aprendre a resoldre problemes de geometria. A l'aula de ciència-ficció on treballen, l'Ariadna, una terminal de darreríssima generació, segueix atentament els seus passos. Ocasionalment, quan ho creu oportú, fa que l'Euclides, un dels seus mòduls més avançats, ajudi els estudiants a retrobar el fil de les seves disquisicions. Per a aprofitar de manera òptima les cavil·lacions de l'Euclides, convé remarcar que té dos modes de funcionament. Un, que podem qualificar de *declaratiu*, imita el procés de «síntesi» dels antics grecs, és a dir, enuncia conclusions que s'obtenen directament de les proposicions generades fins al moment mitjançant coneixements establerts (i generalment coneguts). L'altre, que podem qualificar d'*interrogatiu*, imita el procés d'«anàlisi» en el sentit dels antics, és a dir, fa *preguntes clau* amb les quals usualment es redueixen a un curt nombre els coneixements que cal posar en joc per intentar aconseguir l'objectiu del problema. Com veurem, els estudiants aprenen ràpidament les tècniques de resolució de problemes, i progressivament l'ajut que necessiten de l'Euclides es fa més esporàdic

## Geometria

i considerablement més sofisticat.

### Problema GE6

*Després de llegir l'enunciat, en Pau i la Raquel dibuizen la figura 37. Recorden molt bé que a l'inici de les classes el professor els va dir que, quan es tracta de resoldre problemes de geometria, un dibuix pot ésser decisiu. Amb tot això, però, és el primer problema, estan una mica cohibits i no saben ben bé com començar. Veient la situació, l'Ariadna sollicita a l'Euclides que els ajudi.*



**Figura 37: El pentàgon i la raó àuria**

EUCLIDES: El quadrilàter  $PQUT$  és un paral·lelogram.

RAQUEL: Té raó, la diagonal  $QS$  és paral·lela al costat  $PT$  i la diagonal  $TR$  és paral·lela al costat  $PQ$ .

EUCLIDES: El quadrilàter  $PQUT$  és un rombe.

PAU: És clar,  $PT = PQ$  perquè el pentàgon és regular.

EUCLIDES: Així  $QU = PT$ .

RAQUEL: Obvi.

EUCLIDES: Per tant,  $QS - PT = QS - QU = US$ .

P. I R.: Evident.

EUCLIDES: Els triangles  $QTU$  i  $RUS$  són semblants.

RAQUEL: Ja ho veig, podem aplicar el criteri AAA de semblança.

PAU: El que diu que dos triangles són semblants quan tenen els tres angles iguals?

RAQUEL: Sí, si no ho recordo malament.

*L'Euclides ha aprofitat aquests instants per acabar la seva tasca i descarrega dues línies de símbols:*

S. Xambó

EUCLIDES: Per tant  $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$ . I com que  $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$ , pel que ja hem vist, obtenim que  $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$ .

*Passen els moments i L'Euclides ja no diu res més.*

R. i P.: I...?

EUCLIDES: Què volíeu demostrar?

PAU: Que el costat del pentàgon regular és segment auri de la diagonal.

EUCLIDES: I això què vol dir?

RAQUEL: Segons la definició, que si  $a$  és la diagonal i  $x$  el costat, llavors  $a/x = x/(a-x)$ .

EUCLIDES: I fins on hem arribat en mode directe?

*L'Euclides diu «mode directe» al que nosaltres n'hem dit «declaratiu», i diu «mode invers» al que n'hem dit «interrogatiu», això és, el que ha emprat després de «I...?»*

PAU: Fins a la relació  $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$ .

R. i P.: Ah, ja ho veiem! Efectivament s'ha establert que el costat  $PT$  és segment auri de la diagonal  $QS$ , i això acaba la prova!

**Problema GE16**

*Ariadna també sollicita l'ajuda de l'Euclides, que comença en mode interrogatiu.*

EUCLIDES: Quina mena de coses us demanen?

PAU: No entenc què vol dir.

RAQUEL: Jo crec que ho sé: hem de demostrar que es compleixen unes certes desigualtats.

EUCLIDES: Magnífic. Desigualtats..., entre què?

PAU: Entre distàncies.

EUCLIDES: Excel·lent. I de què disposeu per demostrar desigualtats entre distàncies?

PAU: Jo només conec la desigualtat triangular.

EUCLIDES: Pots enunciar-la?

PAU: Sí: en un triangle, tot costat és inferior a la suma dels altres dos.

EUCLIDES: I com podríem intentar aplicar-la a les desigualtats que ens demanen?

*En Pau i la Raquel pensen un moment. No saben ben bé què dir. L'Euclides hi intervé, en mode declaratiu, per facilitar-los la tasca.*

EUCLIDES: El problema demana dues desigualtats; en realitat estem en presència de dos problemes.

RAQUEL: Hauríem de fer un dibuix.

## Geometria

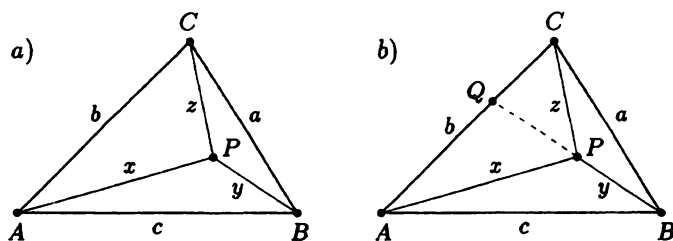


Figura 38: Figures usades per resoldre el problema 16

Amb un no res dibuixen la figura 38.a.

RAQUEL: Si posem  $2p$  per denotar el perímetre de  $ABC$ , hem de veure, d'una banda, que  $p < x + y + z$ , i, de l'altra, que  $x + y + z < 2p$ .

EUCLIDES: Us faré una pregunta més explícita que l'anterior: com podeu usar la desigualtat triangular per establir  $p < x + y + z$ ?

PAU: Hauríem de cercar triangles, a la figura 38.a, en els que un costat estés relacionat amb el perímetre i els altres dos amb els segments  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

RAQUEL: Els triangles  $PAB$ ,  $PBC$  i  $PCA$ , per exemple?

PAU: Sí, per exemple. La desigualtat triangular, aplicada a  $PAB$ , ens dona  $c < x + y$ .

RAQUEL: I aplicada als altres dos ens dona, anàlogament,  $a < y + z$  i  $b < z + x$ .

PAU: Sumant les tres desigualtats tenim  $a + b + c < 2x + 2y + 2z$ .

RAQUEL: I com que  $a + b + c = 2p$ , en resulta que  $p < x + y + z$ , com volíem demostrar.

EUCLIDES: Heu demostrat una part del problema 16.

PAU: L'altra part era la desigualtat  $x + y + z < 2p$ .

RAQUEL: Si intentem de prosseguir l'anàlisi de l'Euclides, ara ens hauríem de preguntar com podem usar la desigualtat triangular per establir  $x + y + z < 2p$ .

PAU: Com en el cas anterior, hauríem de cercar triangles en els quals, a la inversa d'abans, un costat estigui relacionat amb els segments  $x$ ,  $y$  i  $z$ , i els altres dos, amb el perímetre.

*Miren la figura 38.a i no aconsegueixen veure cap triangle que compleixi el que volen. Per un moment no saben què fer. Tot d'una, però, la Raquel té un idea; li sembla bona i això l'empeny a explicar les seves conseqüències sense pausa:*

RAQUEL: No ens cal la desigualtat triangular: és evident que  $x + y < b + a$ ; anàlogament,  $y + z < c + b$  i  $z + x < a + c$ ; sumant,  $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$ , és a dir,  $x + y + z < 2p$ . I ja està, hem acabat!

PAU: Això ha estat brillant, Raquel. Però... com veus que  $x + y < a + b$ ?

RAQUEL: Hum!

PAU: Com que és una desigualtat entre distàncies, potser el que hem d'intentar és provar-la aplicant de nou la desigualtat triangular.

RAQUEL: Tens raó; ja ens hem convençut que és l'única eina que coneixem per intentar resoldre aquesta mena de qüestions.

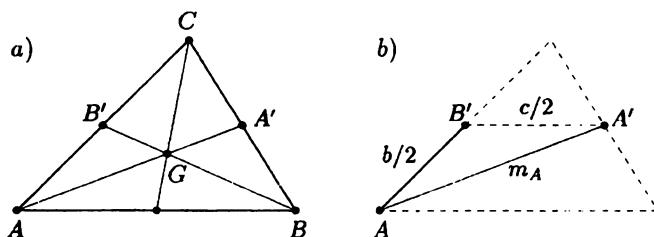
*En Pau completa la figura 38.a fins a obtenir la figura 38.b.*

PAU: Crec que ja ho tenim. Fixa-t'hi:  $x < AQ + QP$ , per la desigualtat triangular; per tant  $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB$ ; ara  $QB < QC + CB$ , altra cop per la desigualtat triangular, d'on  $AQ + QB < AQ + QC + CB = AC + CB = b + a$ . Per tant,  $x + y < b + a$ .

RAQUEL: Efectivament. I així sí que la demostració és completa!

### Problema GE17

*Abans de passar a intentar resoldre el problema 17, en Pau i la Raquel llegeixen el seu enunciat amb molta cura i dibuixen la figura 39.a.*



**Figura 39:** Figures usades per resoldre el problema 17

PAU: Em pregunto si el problema anterior, aplicat al baricentre  $G$ , ens donaria alguna cosa.

RAQUEL: Podem provar-ho. Només ens caldria saber el valor de  $x + y + z$  [amb les notacions del problema anterior i amb  $P = G$ ] en termes de  $\mu$  [la suma de les tres mitjanes].

PAU: Això és fàcil. Sabem que  $AG = \frac{2}{3}AA'$ , on  $A'$  és el punt mitjà de  $BC$ . En altres paraules,  $x = \frac{2}{3}m_A$ , on  $m_A$  és la mitjana corresponent al vèrtex  $A$ . Per tant  $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$ .

RAQUEL: I com que  $p < x + y + z$  (pel problema 16), resulta que  $p < \frac{2}{3}\mu$ .

PAU: Que és equivalent a  $\frac{3}{2}p < \mu$ , la primera de les relacions que volem demostrar. Què passarà amb la segona?

RAQUEL: Si apliquem la segona desigualtat del problema anterior, obtenim  $\frac{2}{3}\mu < 2p$ .

PAU: Però el que volem és  $\mu < 2p$ . I  $\mu < 2p$  és més forta que  $\frac{2}{3}\mu < 2p$ .

## Geometria

RAQUEL: Perquè  $\frac{2}{3}\mu < \mu$ , oi? Què hi farem! Haurem d'investigar una altra via.

PAU: Podem intentar aplicar la desigualtat triangular una altra vegada.

RAQUEL: Bona idea! Pel que hem après fins ara, ens cal trobar triangles amb un costat relacionat amb  $\mu$ , i els altres dos, amb el perímetre.

*Pensen una mica. Al final dibuizen la figura 39.b.*

PAU: Com que  $A'B' = c/2$ , el triangle  $AA'B'$  té un costat,  $AA'$ , que és la mitjana  $m_A$ , mentre que els altres dos costats són iguals a  $c/2$  i  $b/2$ .

RAQUEL: Ergo,  $m_A < c/2 + b/2$ . Anàlogament tenim  $m_B < a/2 + c/2$  i  $m_C < b/2 + a/2$ .

PAU: I sumant,  $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$ .

*La Raquel i en Pau es disposen a celebrar l'èxit. Encara no han tingut temps de començar, quan l'Euclides pregunta:*

EUCLIDES: Creieu que les desigualtats obtingudes son òptimes?

*L'interès amb què reben aquesta qüestió no els priva de prendre's un descans.*

Consignem aquí només que quan van tornar a la qüestió es van adonar de les coses següents. Al problema 16, si fem  $P = C$ , llavors  $x + y + z = a + b + 0$ . Per tant, si fem que  $c$  sigui cada vegada més petit, llavors  $2p = a + b + c$  tendeix a  $a + b = x + y + z$ , i per tant la desigualtat  $x + y + z < 2p$  no es pot millorar. Per altra banda, si fem  $P = A$  i fem tendir  $c$  a 0, llavors  $x + y + z = 0 + a + c$  tendeix a  $a$  i  $p = (a + b + c)/2$  tendeix a  $(2a)/2 = a$ , amb la qual cosa es veu que la desigualtat  $p < x + y + z$  tampoc no es pot millorar. Pel que fa al problema 17, es van adonar, considerant un triangle amb  $c$  cada vegada més petit, que la desigualtat  $\mu < 2p$  no es pot millorar, i considerant un triangle en el que  $C$  tendeix al punt mitjà de  $AB$ , que tampoc no es pot millorar la desigualtat  $\frac{3}{2}p < \mu$ .

### Problema GE23

EUCLIDES: Què ens demanen?

RAQUEL: Demostrar que el triangle òrtic d'un triangle donat és el que té el perímetre més petit entre tots els triangles inscrits al primer.

PAU: És a dir, es tracta de veure que una certa longitud és mínima entre les que satisfan unes certes condicions.

EUCLIDES: Quins enunciats coneixeu que permetin concloure que una longitud és mínima?

RAQUEL: Jo només conec que entre totes les corbes que uneixen dos punts, la recta és la que té longitud menor.

EUCLIDES: Podríem usar aquest coneixement per determinar si un triangle inscrit té perímetre mínim?

PAU: No ho veig pas fàcil, ja que el triangle és una línia tancada.

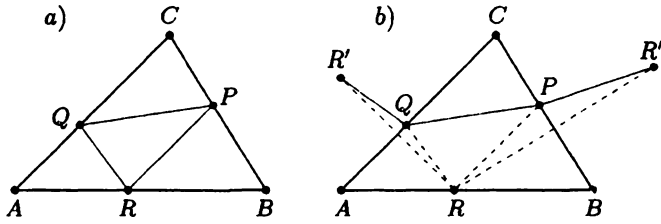


Figura 40: Resolució del problema de Fagnano

Fan una pausa per dibuixar la figura 40.a.

RAQUEL: Potser podríem obrir-lo [el triangle  $PQR$ ]; obrir-lo d'alguna manera que ens fos útil.

PAU: Genial! Potser una manera d'aconseguir-ho sigui canviar els costats  $QR$  i  $PR$  pels seus simètrics  $QR'$  i  $QR''$  respecte dels costats  $AC$  i  $BC$ .

RAQUEL: Vegem quin aspecte tindria fent una figura.

Dibuixen la figura 40.b.

RAQUEL: La línia  $R'QPR''$  té, doncs, la mateixa longitud que el perímetre del triangle inscrit  $PQR$ .

PAU: Sí, és clar; per les propietats de les simetries sabem que  $R'Q = RQ$  i  $R''P = RP$ .

RAQUEL: A més a més,  $R'$  i  $R''$  no depenen en absolut de  $P$  i  $Q$ ; només depenen de la posició de  $R$ .

PAU: Ja veig com usar la propietat de la línia recta!

En Pau dibuixa la figura 41.a, mentre explica:

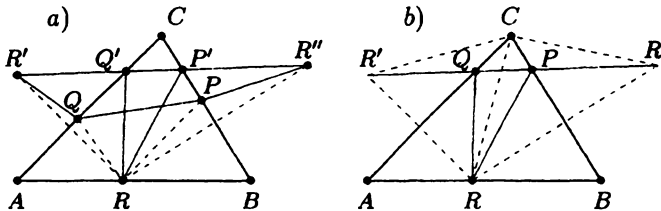


Figura 41: Resolució del problema de Fagnano (continuació)

PAU: Si considerem el segment  $R'R''$ , i aquest talla els segments  $AC$  i  $BC$  en els punts  $Q'$  i  $P'$ , llavors  $R'Q'P'$  és el perímetre del triangle  $P'Q'R'$ . I com que  $R'R''$  és més curt que  $R'QPR''$  (o igual, si per casualitat fos  $Q' = Q$  i  $P' = P$ ), el triangle  $P'Q'R'$  té el perímetre més petit (o igual) que  $PQR$ . De fet, és el de perímetre més petit sempre que mantinguem  $R$  fix.

## Geometria

RAQUEL: Ara hauríem de veure, doncs, per quin punt  $R$  el segment  $R'R''$  té longitud mínima, ja que llavors el triangle  $P'Q'R$  serà la solució del problema.

*En Pau i la Raquel romanen en silenci. No veuen què poden fer. Han arribat fins aquí ajudats per l'Euclides en mode invers. Perquè puguin seguir, l'Euclides canvia súbitament a mode directe.*

EUCLIDES: El triangle  $CR'R''$  és isòsceles.

RAQUEL: Per què?

EUCLIDES:  $CR' = CR = CR''$  per les propietats de la simetries.

*Per poder seguir, dibuixen la figura 41.b. Decideixen oblidar-se dels punts  $P$  i  $Q$  del triangle inscrit inicial i usar les lletres  $P$  i  $Q$  per designar els punts que abans eren  $P'$  i  $Q'$ .*

PAU: De fet, doncs,  $CR'R$  i  $CRR''$  també són isòsceles.

RAQUEL: A més,  $CA$  i  $CB$  són les altures dels dos darrers triangles respecte del vèrtex  $C$ .

PAU: En resulta que l'angle  $\widehat{R'CR''}$  és el doble de l'angle  $\widehat{ACB}$ . Com que aquest darrer és fix,  $\widehat{R'CR''}$  també és fix; vull dir que no depèn de  $R$ .

RAQUEL: Tenim un triangle isòsceles,  $R'CR''$ , volem minimitzar la seva base  $R'R''$ , i sabem que l'angle oposat a la base és constant.

PAU: Sota aquestes condicions, la base serà mínima quan els costats (que són iguals) siguin mínims.

RAQUEL: Com que els costats són iguals a  $CR$ , la base  $R'R''$  serà mínima quan el segment  $CR$  ho sigui.

PAU: Fantàstic!  $CR$  és mínim quan  $R$  és el peu de l'altura respecte del vèrtex  $C$ !

RAQUEL: Per tant, el triangle inscrit de perímetre mínim és tal que  $R$  és el peu de l'altura i  $P$  i  $Q$  es construeixen com ja s'ha indicat.

PAU: Com que el paper de  $R$  en les consideracions anteriors el podrien haver fet  $P$  o  $Q$ , realment  $P$  i  $Q$  també són els peus de les corresponents altures.

RAQUEL: De fet, hem demostrat, doncs, que el triangle inscrit de perímetre mínim és el triangle òrtic, i que els simètrics d'un vèrtex del triangle òrtic respecte dels dos costats que no el contenen estan alineats amb els altres dos vèrtexs (del triangle òrtic).

PAU: És ben curiós!

*Mentre celebren alegrement aquestes excel·lents conclusions...*

EUCLIDES: On heu usat la hipòtesi que el triangle és acutangle? És, aquesta hipòtesi, indispensable? Podríeu usar la vostra conclusió per resoldre el problema 19?

**Problema GE35**

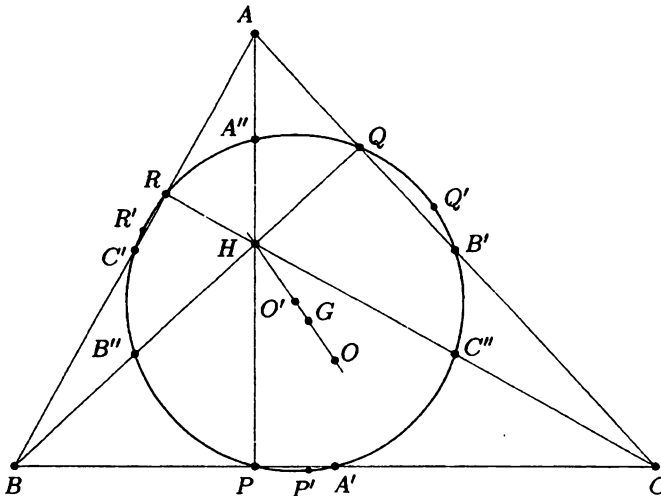
La Raquel i en Pau recorden que el cercle dels nou punts és el cercle  $A'B'C'$ , on  $A', B', C'$  són els punts mitjans dels costats, i que aquest cercle, també anomenat «d'Euler», passa pels peus  $P, Q, R$  de les altures i pels punts mitjans  $A'', B'', C''$  dels segments  $HA, HB, HC$ . També recorden, pel que han vist en problemes anteriors, que l'homotècia de centre  $G$ , el baricentre, transforma el cercle circumscrit  $ABC$  en  $A'B'C'$ . Abans de decidir què fer, dibuixen la figura 42 (s'ho arrangen de manera que  $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$ ). D'acord amb l'enunciat, el punt  $P'$  de l'arc  $A'P$  es defineix de manera que l'arc  $A'P' = \frac{1}{3}A'P$ ; i els punts  $Q'$  i  $R'$  es defineixen de manera similar.

RAQUEL: Volem veure que  $P'Q'R'$  és un triangle equilàter.

PAU: Segur que aquí l'Euclides preguntaria: Com podem veure que un triangle és equilàter?

RAQUEL: Una manera de fer-ho és aplicar la definició: un triangle és equilàter quan els seus tres costats són iguals. També n'hi ha prou veient que els seus tres angles són iguals (necessàriament d'amplitud  $\pi/3$ ). El que encara no veig és com aplicar algun d'aquests criteris al problema.

PAU: Atès que  $P'Q'R'$  estan sobre el cercle d'Euler, potser el segon criteri aniria millor.



**Figura 42:** Punts  $P', Q', R'$  del cercle d'Euler

RAQUEL: A mi també m'ho sembla. Hauríem de veure que, en el triangle  $P'Q'R'$ , els angles  $\widehat{P'}$ ,  $\widehat{Q'}$  i  $\widehat{R'}$  tenen amplitud  $\pi/3$ .

PAU: Com que aquests angles estan inscrits al cercle d'Euler, això és equivalent a dir que els arcs  $P'Q'$ ,  $Q'R'$  i  $R'P'$  sobre el cercle d'Euler tenen una amplitud de  $2\pi/3$  radians.

## Geometria

RAQUEL: Potser no serà tan difícil com podia semblar. Sobre el cercle d'Euler hi tenim ara 12 punts i potser ens aniria bé, abans de seguir, de deduir les amplituds d'alguns dels arcs entre aquests punts.

PAU: Em sembla bé. Els arcs  $A'B'$ ,  $B'C'$  i  $C'A'$ , per exemple, són fàcils: les seves amplituds són les mateixes que les dels arcs  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  sobre el cercle circumscrit  $ABC$ , és a dir, iguals a  $2\hat{C}$ ,  $2\hat{A}$  i  $2\hat{B}$ .

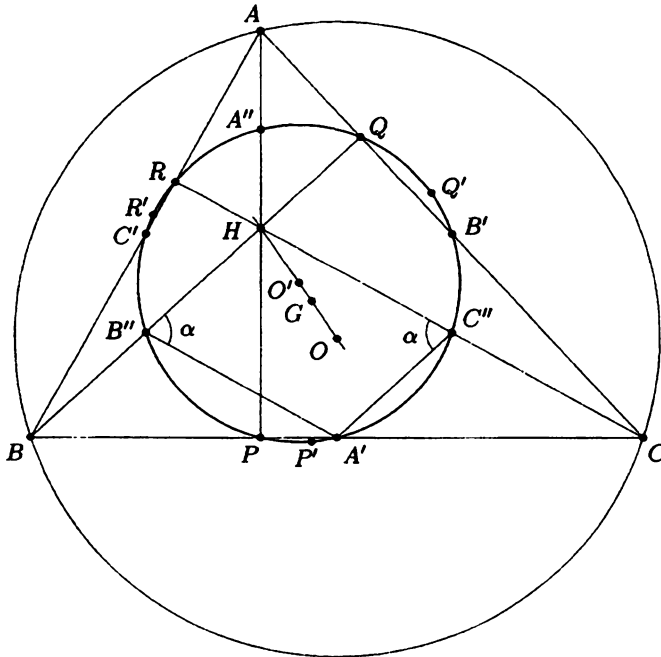
RAQUEL: Suposo que la primera afirmació que fas prové de l'homotècia que transforma  $ABC$  en  $A'B'C'$ , i que la segona surt directament del que sabem d'angles inscrits.

PAU: Efectivament.

$$A'B' = 2\hat{C}, \quad B'C' = 2\hat{A}, \quad C'A' = 2\hat{B}.$$

Ara ja no en veig cap més.

RAQUEL: Jo veig una relació que potser ens pot donar quelcom més. Fixa-t'hi [mentre ho diu, dibuixa la figura 43]: Com que  $A'$  és el punt mitjà de  $BC$  i  $C''$  el punt mitjà de  $BH$ , resulta que  $A'C''$  és paral·lela a l'altura  $BH$ .



**Figura 43:** Determinació d'angles centrals sobre el cercle d'Euler

PAU: Anàlogament  $A'B''$  és paral·lela a l'altura  $CR$ , etc.

RAQUEL: I així  $A'C''HB''$  és un paral·lelogram.

PAU: I tot això què té a veure amb els angles?

*La Raquel posa la lletra  $\alpha$  a l'angle  $\widehat{A'C''H}$  i a l'angle  $\widehat{HB''A'}$ .*

RAQUEL: Són iguals perquè són angles oposats en un paral·lelogram.

PAU: Ja ho veig. Per angles inscrits altra vegada,  $2\alpha$  és igual a l'arc  $A'C'R$  i també a l'arc  $A'B'Q$ .

RAQUEL: Els costats  $C''A'$  i  $C''H$  de l'angle  $\widehat{A'C''H}$  són perpendiculars, respectivament, als costats  $AC$  i  $AB$ . Per tant, de fet,  $\alpha = \hat{A}$ .

PAU: Un gran pas: ara ja tenim que l'amplitud dels arcs  $A'B'Q$  i  $A'C'R$  és igual a  $2\hat{A}$ .

RAQUEL: I per diferència [ $B'Q = A'Q - A'B'$  i  $C'R = A'R - A'C'$ ] obtenim que  $B'Q = 2\hat{A} - 2\hat{C}$  i  $C'R = 2\hat{A} - 2\hat{B}$ . Anàlogament, serà  $A'P = 2\hat{B} - 2\hat{C}$ . És a dir,

$$B'Q = 2\hat{A} - 2\hat{C}, C'R = 2\hat{A} - 2\hat{B}, A'P = 2\hat{B} - 2\hat{C}.$$

PAU: Ara ja podem calcular l'arc  $P'Q'$ :

$$\begin{aligned} P'Q' &= \frac{1}{3}A'P + A'B' + \frac{1}{3}B'Q \\ &= \frac{2}{3}(\hat{B} - \hat{C}) + 2\hat{C} + \frac{2}{3}(\hat{A} - \hat{C}) \\ &= \frac{2}{3}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Que  $Q'R' = \frac{2\pi}{3}$  i  $R'P' = \frac{2\pi}{3}$ , es veu de manera anàloga.

*En Pau i la Raquel dibuixen la figura 44, simplement per gaudir de veure amb imatges el que han vist abans amb els ulls de la geometria. Abans de tenir temps de tancar la teminal i els quaderns, l'Euclides té temps de generar una pregunta.*

EUCLIDES: Què en podeu dir de les tres parelles d'arcs  $A'C''$  i  $B'C''$ ,  $PB''$  i  $C'B''$ ,  $QA''$  i  $RA''$ ?

Podem transcriure breument que la Raquel i en Pau van veure ràpidament, usant que les altures són bisectrius del triangle òrtic, que  $RA'' = QA''$  i, usant el treball fet en el darrer problema, que  $RA'' = QA'' = \pi - 2\hat{A}$ . Anàlogament  $PB'' = RB'' = \pi - 2\hat{B}$  i  $PC'' = QC'' = \pi - 2\hat{C}$ . Això, i de nou amb els resultats del primer problema, els permet veure que  $B'C'' = C'B'' = \pi - 2\hat{A}$  i  $A'C'' = PB'' = \pi - 2\hat{B}$ .

## 5 Mostra de solucions

En aquesta secció s'inclouen solucions convencionals dels problemes GE6, GE16, GE17, GE23 i GE35. Aquestes mateixes solucions les podeu trobar exposades en forma dialogada

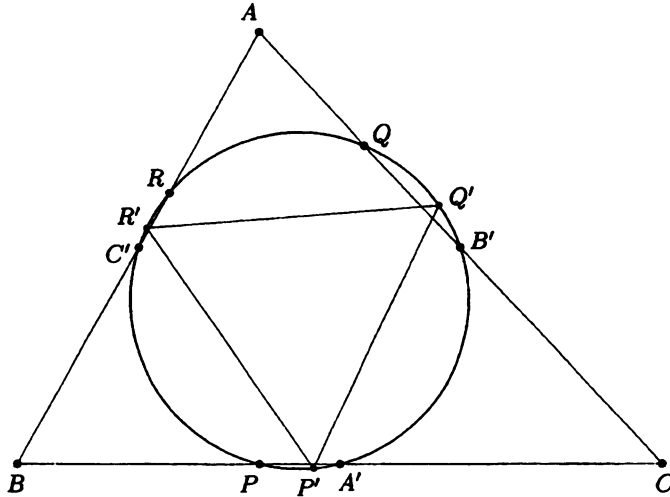


Figura 44: El triangle equilàter  $P'Q'R'$

a la secció 4, la qual cosa pot tenir interès pels lectors que vulguin reflexionar amb més deteniment sobre el procés de resolució de problemes.

#### Problema GE6

Considerem la figura 37 (pàg. 78). El quadrilàter  $PQUT$  és un rombe, ja que la diagonal  $QS$  és paral·lela al costat  $PT$ , la diagonal  $TR$  és paral·lela al costat  $PQ$  i  $PT = PQ$  (perquè el pentàgon és regular). Així  $QU = PT$ , d'on resulta que  $QS - PT = QS - QU = US$ .

Per altra banda, els triangles  $QTU$  i  $RUS$  són semblants (criteri AAA de semblança). Per tant  $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$ . I com que  $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$ , pel que ja hem vist, obtenim que  $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$ . Per tant, el costat  $PT$  és segment auri de la diagonal  $QS$ , per la definició de segment auri.

#### Problema GE16

Com que ens demanen que demostrem dues desigualtats entre distàncies, intentarem aplicar la desigualtat triangular. Amb les notacions de la figura 38.a, si posem  $2p$  per denotar el perímetre de  $ABC$ , hem de veure, d'una banda, que  $p < x + y + z$ , i, de l'altra, que  $x + y + z < 2p$ .

Per establir que  $p < x + y + z$ , fixem-nos en els triangles  $PAB$ ,  $PBC$  i  $PCA$ . La desigualtat triangular, aplicada a  $PAB$ , ens dóna  $c < x + y$ . Anàlogament,  $a < y + z$  i  $b < z + x$ . Sumant les tres desigualtats tenim  $a + b + c < 2x + 2y + 2z$ . Com que  $a + b + c = 2p$ , en resulta que  $p < x + y + z$ .

Manca veure la desigualtat  $x + y + z < 2p$ . Considerem la figura 38.b. Aplicant la desigualtat triangular obtenim:  $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB < AQ + QC + CB = AC + CB = b + a$ . Anàlogament,  $y + z < c + b$  i  $z + x < a + c$ ; sumant,  $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$ , és a dir,  $x + y + z < 2p$ .

**Problema GE17**

El problema 16, aplicat al baricentre  $G$ , ens dona la primera desigualtat. En efecte, amb les notacions de la figura 39.a, sabem que  $AG = \frac{2}{3}AA'$ , on  $A'$  és el punt mitjà de  $BC$ . En altres paraules,  $x = \frac{2}{3}m_A$ , on  $m_A$  és la mitjana corresponent al vèrtex  $A$ . Per tant  $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$ . Com que  $p < x + y + z$  (pel problema 16), resulta que  $p < \frac{2}{3}\mu$ , que és equivalent a  $\frac{3}{2}p < \mu$ . Val a remarcar que si apliquem la segona desigualtat del problema 16, obtenim  $\frac{2}{3}\mu < 2p$ , que és una desigualtat més feble que la desigualtat  $\mu < 2p$  que volem demostrar.

Per veure que  $\mu < 2p$ , considerem la figura 39.b. Com que  $A'B' = c/2$ , el triangle  $AA'B'$  té un costat,  $AA'$ , que és la mitjana  $m_A$ , mentre que els altres dos costats són iguals a  $c/2$  i  $b/2$ . Per tant,  $m_A < c/2 + b/2$ . Anàlogament, tenim  $m_B < a/2 + c/2$  i  $m_C < b/2 + a/2$ . Si ara sumem aquestes tres desigualtats, obtenim  $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$ .

**Problema GE23**

Considerem la figura 40.a. Volem veure que  $PQR$  té perímetre mínim si i només si  $PQR$  és el triangle òrtic de  $ABC$ . Siguin  $R'$  i  $R''$  els simètrics del punt  $R$  respecte dels costats  $AC$  i  $BC$ , respectivament (figura 40.b). La línia  $R'QPR''$  té la mateixa longitud que el perímetre del triangle inscrit  $PQR$ . Si considerem els punts d'intersecció,  $Q'$  i  $P'$ , de  $R'R''$  amb els costats  $AC$  i  $BC$ , respectivament (figura 41.a), llavors el perímetre de  $P'Q'R$  és igual a  $R'R''$ . Com que la longitud de  $R'R''$  és inferior (o igual) a la longitud de la línia  $R'QPR''$ , veiem que el triangle  $P'Q'R$  és el de perímetre més petit entre tots els triangles inscrits  $PQR$  (amb  $R$  fix). Ara ens cal veure per quin punt  $R$  del costat  $AB$  té el segment  $R'R''$  longitud mínima, ja que llavors el triangle  $P'Q'R$  serà la solució del problema.

Remarquem que el triangle  $CR'R''$  és isòsceles ( $CR' = CR = CR''$ ) per les propietats de la simetria; vegeu la figura 41.b). De fet,  $CR'R$  i  $CRR''$  també són isòsceles i  $CA$  i  $CB$  són perpendiculars a  $RR'$  i  $RR''$ . En resulta que l'angle  $\widehat{R'CR''}$  és el doble de l'angle  $\widehat{ACB}$ . Com que aquest darrer és fix,  $\widehat{R'CR''}$  també és fix (és a dir, no depèn de  $R$ ). Per tant la base  $R'R''$  del triangle isòsceles  $R'CR''$  té longitud mínima si i només si els seus costats tenen longitud mínima. Però com que els costats són iguals a  $CR$ , la base  $R'R''$  serà mínima quan el segment  $CR$  ho sigui, és a dir, si i només si  $R$  és el peu de l'altura del vèrtex  $C$ . Anàlogament, es veuria que  $P$  i  $Q$  han de ser els peus de les altures de  $A$  i  $B$ , respectivament.

**Problema GE35**

Recordem que el cercle dels nou punts és el cercle  $A'B'C'$ , on  $A', B', C'$  són els punts mitjans dels costats, i que aquest cercle, també anomenat d'Euler, passa pels peus  $P, Q, R$  de les altures i pels punts mitjans  $A'', B'', C''$  dels segments  $HA, HB, HC$ . Recordem també, pel que hem vist en problemes anteriors, que l'homotècia de centre  $G$  (el baricentre), transforma el cercle circumscrit  $ABC$  en  $A'B'C'$ .

Considerem la figura 42 (suposarem que  $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$ ). D'acord amb l'enunciat, el punt  $P'$  de l'arc  $A'P$  es defineix de manera que l'arc  $\text{arc}(A'P') = \frac{1}{3}\text{arc}(A'P)$ ; i els punts  $Q'$  i  $R'$  es defineixen de manera similar. Volem veure que  $P'Q'R'$  és un triangle equilàter, per la qual cosa és suficient veure que els angles  $\widehat{P'Q'R'}$  i  $\widehat{P'}$  (del triangle  $P'Q'R'$ ) tenen amplitud  $\pi/3$ . Com que aquests angles estan inscrits al cercle d'Euler, això és equivalent a dir que els arcs  $P'Q', Q'R'$  i  $R'P'$  sobre el cercle d'Euler tenen una amplitud de  $2\pi/3$  radians.

Les amplituds dels arcs  $A'B', B'C'$  i  $C'A'$  coincideixen amb les dels arcs  $AB, BC$  i  $CA$

## Geometria

sobre el cercle circumscrit  $ABC$ , és a dir, són iguals a  $2\hat{C}$ ,  $2\hat{A}$  i  $2\hat{B}$  (per l'homotècia que transforma  $ABC$  en  $A'B'C'$  i per les propietats dels angles inscrits al cercle  $ABC$ ). Per tant,

$$\text{arc}(A'B') = 2\hat{C}, \text{arc}(B'C') = 2\hat{A}, \text{arc}(C'A') = 2\hat{B}.$$

Considerem ara la figura 43. Com que  $A'$  és el punt mitjà de  $BC$  i  $C''$  el punt mitjà de  $BH$ , resulta que  $A'C''$  és paral·lela a l'altura  $BH$ . Anàlogament,  $B'A''$  és paral·lela a l'altura  $CH$  i  $C'B''$  és paral·lela a l'altura  $AH$ . Per tant,  $A'C''HB'$  és un paral·lelogram. Així obtenim que els angles  $\widehat{A'C''H}$  i  $\widehat{HB'A'}$  són iguals. Però, per angles inscrits altra vegada,  $2\alpha$  és igual a l'arc  $A'C'R$  i també a l'arc  $A'B'Q$ . A més a més, els costats  $C''A'$  i  $C''H$  de l'angle  $\widehat{A'C''H}$  són perpendiculars, respectivament, als costats  $AC$  i  $AB$ . Per tant,  $\alpha = \hat{A}$ . Tenim, doncs, que l'amplitud dels arcs  $A'B'Q$  i  $A'C'R$  és igual a  $2\hat{A}$ . Per diferència [ $B'Q = A'Q - A'B'$  i  $C'R = A'R - A'C'$ ] obtenim que  $B'Q = 2\hat{A} - 2\hat{C}$  i  $C'R = 2\hat{A} - 2\hat{B}$ . Anàlogament serà  $A'P = 2\hat{B} - 2\hat{C}$ . És a dir,

$$\text{arc}(B'Q) = 2\hat{A} - 2\hat{C}, \text{arc}(C'R) = 2\hat{A} - 2\hat{B}, \text{arc}(A'P) = 2\hat{B} - 2\hat{C}.$$

Ara ja podem calcular l'arc  $P'Q'$ :

$$\begin{aligned} \text{arc}(P'Q') &= \frac{1}{3}\text{arc}(A'P) + \text{arc}(A'B') + \frac{1}{3}\text{arc}(B'Q) \\ &= \frac{2}{3}(\hat{B} - \hat{C}) + 2\hat{C} + \frac{2}{3}(\hat{A} - \hat{C}) \\ &= \frac{2}{3}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Que  $\text{arc}(Q'R') = \frac{2\pi}{3}$  i  $\text{arc}(R'P') = \frac{2\pi}{3}$ , es veuen de manera anàloga.

## 6 Referències

- H. S. M. Coxeter, Fundamentos de Geometría. Limusa.
- H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry revisited, The Mathematical Association of America, 1967 (sexta edició).
- H. Eves, A survey of geometry, Allyn and Bacon.
- L. C. Larson, Problem-solving through problems, Springer-Verlag.
- P. Puig Adam, Curso de Geometría métrica (Tomo I - Fundamentos). Gómez Puig Ediciones.
- FORUM de problemes 93/94, Societat Catalana de Matemàtiques, IEC.